Arithmétique

Feuille 1

Exercice 1. Établir les formules ou assertions suivantes par récurrence.

1. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ 1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2$.
3. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 divise $n^3 - n$.
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^0 + 2^1 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
6. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tout produit de n entiers consécutifs est divisible par $n!$.
8. Quels que soient $k, n \in \mathbb{N}$, $(k + 1)^n - kn - 1$ est divisible par k^2.

Exercice 2. Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 1$, $u_2 = 3$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ pour tout $n \geq 1$.

1. Calculer u_3, u_4, u_5, puis deviner une formule générale pour u_n.
2. Démontrer la formule par une récurrence d'ordre deux.

Exercice 3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + u_0 + \cdots + u_n$ pour tout $n \geq 1$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, puis deviner une formule générale pour u_n.
2. Démontrer la formule par une récurrence forte.

Exercice 4. L'argument par récurrence suivant est-il correct ?

On note, pour tout $n \geq 1$, P_n la proposition suivante : Si une trousse contient n stylos, alors les n stylos sont de la même couleur.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, P_n est vraie.
Initialisation : Pour $n = 1$, P_1 est vraie puisqu'il n'y a qu'un stylo.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que P_n est vraie, montrons que P_{n+1} l'est aussi. Prenons une trousse qui a $n + 1$ stylos, on en enlève 1, il en reste donc n qui sont de la même couleur par l'hypothèse de récurrence. On en enlève encore 1 dans la trousse puis on remet le premier: il y a à nouveau n stylos: ils sont donc de la même couleur. Donc le premier stylo enlevé a la même couleur que les n autres.

Donc P_{n+1} est vraie.

Exercice 5. Dans une division euclidienne entre entiers naturels, quels peuvent être le diviseur et le quotient lorsque le dividende est 2 020 et le reste 335 ?

Exercice 6. Déterminer les entiers naturels a et b de somme 2 020 et tels que la division euclidienne de a par b donne 4 pour quotient et pour reste 300.

Exercice 7. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, le nombre $A_n = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Exercice 8. En remarquant que $27 \cdot 37 + 1 = 1\ 000 = 77 \cdot 13 - 1$, déterminer les restes des divisions du nombre $N = 742\ 371\ 149$ par 37 et par 13.

Exercice 9. Si le dividende est 1 412 et le quotient 16, que peuvent valoir le diviseur et le reste ?

Exercice 10 (Sommes et produits)**.** Alice et Bob remplissent des tableaux carrés dont les lignes sont numérotées de haut en bas et les colonnes de gauche à droite. Dans son tableau Alice écrit à chaque intersection d'une ligne et d'une colonne la somme de leurs numéros; quant à Bob, il y écrit le produit de ces numéros. Alice et Bob calculent la somme de tous les nombres qu'ils ont écrits (sans compter les numéros des lignes et colonnes) et obtiennent le même résultat. Le tableau d'Alice comporte 99 lignes (et 99 colonnes) ; combien celui de Bob en compte-t-il ?

Exercice 11. Soient $a, b, d \in \mathbb{Z}$. Montrer que d divise a et b si et seulement si d divise $ax + by$ quels que soient $x, y \in \mathbb{Z}$.

Exercice 12 (Fonction indicatrice d'Euler)**.** Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\phi(n)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et n et premiers avec n.

1. Calculer $\phi(n)$ pour $n \leq 10$, puis $\phi(p)$ et $\phi(p^d)$ pour p premier et d un entier naturel.
2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Établir l'égalité $n = \sum_{d|n} \phi(d)$ en remarquant que

$$\left\{ \frac{i}{n} \mid 1 \leq i \leq n \right\} = \bigcup_{d|n} \left\{ \frac{j}{d} \mid j \wedge d = 1, 1 \leq j \leq d \right\}.$$

Exercice 13. Combien 10! admet-il de diviseurs ?

Exercice 14. Soit $k \geq 2$. Montrer qu'une somme de k entiers impairs consécutifs n'est jamais un nombre premier.

Exercice 15. Trouver tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x^2 - y^2 = 2\ 019$.

Exercice 16. Montrer que les carrés parfaits sont les entiers dont les diviseurs positifs sont en nombre impair.