Arithmétique

Feuille 2

Exercice 1. Déterminer les entiers naturels $a, b \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{cases} a + b = 182 \\ a \wedge b = 13 \end{cases}.$$

Étant donné des entiers $n \geq 1$ et $d \geq 1$, combien le système

$$\begin{cases} a + b = n \\ a \wedge b = d \end{cases}$$

admet-il de solutions $(a, b) \in \mathbb{N}^2$?

Exercice 2. Démontrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} + \frac{a}{6} \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 3. Déterminer le PGCD de 183 et 273 en utilisant l'algorithme d'Euclide. Donner une relation de Bézout et leur PPCM.

Exercice 4. Déterminer les factorisations en nombres premiers de 1 323 et 840. En déduire leur PGCD et leur PPCM.

Exercice 5.

1. On dispose, comme seul matériel permettant de mesurer le volume d'un liquide, de deux récipients de volumes respectifs 49 L et 37 L. On veut prélever 1 L de liquide (disponible en quantité abondante). Comment faire ?
2. Peut on, de la même manière, obtenir 3 L de liquide, avec des récipients de 7 L et 49 L ?
3. Un œuf doit cuire $n = 4$ min. Comment compter ce temps à l'aide de deux sabliers de 5 min et 7 min respectivement ? Même question pour $n = 11$, pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $3x + 15y = 4$
2. $7x + 21y = 4$
3. $6y + 9z = 3b$, où b est un entier fixé
4. $12y + 18z = 6b$, où b est un entier fixé

5. $6x + 9y + 15z = 1$

6. $7x + 12y + 18z = 1$.

Exercice 7 (Nombres de Mersenne)**.** Soient $a \geq 2$ et $n \geq 2$. Montrer que si $a^n - 1$ est premier alors $a = 2$ et n est premier.

Exercice 8 (Algorithme d'Euclide, solution minimale)**.** Soient a, b deux entiers tels que $a > b > 0$ et $a \wedge b = 1$. Pour $k = 0, 1$, on pose $r_0 = a$, $r_1 = b$, $(u_0, v_0) = (1, 0)$, $(u_1, v_1) = (0, 1)$.

Pour chaque $k \geq 1$, si $r_k > 0$, on effectue la division euclidienne de r_{k-1} par r_k; le quotient est q_k et le reste est r_{k+1} :

$$r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1},\ 0 \leq r_{k+1} \leq r_k - 1.$$

On définit (u_{k+1}, v_{k+1}) par

$$u_{k-1} = q_k u_k + u_{k+1} \text{ et } v_{k-1} = q_k v_k + v_{k+1}.$$

La suite de nombres naturels (r_k) est strictement décroissante. Il y a donc un $n \in \mathbb{N}$ tel que $r_{n+1} = 0$. On a ainsi $au_n + bv_n = r_n = 1$.

Pour $k \geq 0$, on pose

$$t_k = r_k u_{k+1} - r_{k+1} u_k \text{ et } w_k = r_k v_{k+1} - r_{k+1} v_k.$$

1. Montrer que $q_n \geq 2$.

2. Montrer que, pour tout $0 \leq k \leq n$, $u_k u_{k+1} \leq 0$ et $v_k v_{k+1} \leq 0$, avec inégalité stricte lorsque $k \geq 2$.

3. Calculer t_0 et w_0 en fonction de $a = r_0$ et $b = r_1$.

4. Montrer que, pour tout $k \geq 0$, $t_k = -t_{k+1}$, $w_k = -w_{k+1}$.

5. En déduire que $t_0 = (-1)^n t_n$, $w_0 = (-1)^n w_n$, puis que $|u_{n+1}| = b$ et $|v_{n+1}| = a$.

6. Montrer que $|u_{n+1}| = q_n |u_n| + |u_{n-1}|$ et $|v_{n+1}| = q_n |v_n| + |v_{n-1}|$; en déduire que

$$2|u_n| \leq b \text{ et } 2|v_n| \leq a.$$

7. On suppose que $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie $ax + by = 1$. Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x = u_n - kb \text{ et } y = v_n + ka.$$

   Montrer que $|u_n| \leq |x|$ et $|v_n| \leq |y|$.

8. En déduire que $|u_n| + |v_n| \leq |x| + |y|$, avec égalité si et seulement si $k = 0$.