L1 MPC-MI-DL L2 PPE
2024-2025

Arithmétique

Feuille 3

Exercice 1. Soit $n = n_p ... n_1 n_0$ l'écriture décimale d'un entier naturel n. Démontrer les critères de divisiblité de n par les entiers d suivants.

1. $d = 2$: $n_0 = 0, 2, 4, 6, 8$.
2. $d = 3$: $n_0 + ... + n_p$ est divisible par 3.
3. $d = 4$: $\overline{n_1 n_0}^{10}$ est divisible par 4
4. $d = 5$: $n_0 = 0, 5$.
5. $d = 9$: $n_0 + ... + n_p$ est divisible par 9.
6. $d = 11$: $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k n_k$ est divisible par 11.

Exercice 2.

1. Écrire en base 2, en base 5 puis en base 12 les nombres, écrits en base 10, 23 et 54.
2. Quel est le nombre dont l'écriture en base 4 est 321?

Exercice 3. Effectuer dans le système de numération à base 2 les opérations suivantes : $110110 + 11011$, $111101 - 10011$, 11001×1011, $10000111/11011$.

Exercice 4. L'entier N qui s'écrit 21 en décimal peut-il s'écrire 27 dans une autre base ? L'entier N qui s'écrit 12551 en décimal peut-il s'écrire 30407 dans une autre base ?

Exercice 5. Un nombre de trois chiffres s'écrit xyz en base 7, et zyx en base 9. Quel est ce nombre ?

Exercice 6. Sachant que l'on a dans un certain système de numération : $36 + 45 = 103$, calculer, dans ce système, le produit 36×45.

Exercice 7. Dans quel système de numération a-t-on l'égalité : $122 \times 103 = 13121$?

Exercice 8. Que vaut le nombre binaire 10100011 en octal (en base 8) ? en hexadécimal (en base 16) ?

Exercice 9. Montrer que, quelle que soit la base, le nombre 1331 est toujours le cube d'un entier.

Exercice 10. Convertir 1111, 8888 et 9999 de la base dix à la base deux.

Exercice 11. Soit $p = 2m + 1$ un nombre premier impair.

1. Montrer que tous les entiers entre 1 et $p - 1$ sont inversibles modulo p et déterminer ceux qui sont leur propre inverse.
2. En déduire les congruences $(p-1)! \equiv -1 \mod p$ (théorème de Wilson) et $(m!)^2 \equiv (-1)^{m+1} \mod p$.

Exercice 12.

1. Soient p un nombre premier.

(a) On suppose $x \in \mathbb{Z}$ non divisible par p. Vérifier que

$$ax \equiv bx \mod p \Longleftrightarrow a \equiv b \mod p,$$

et que donc $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = \{\overline{x}, \overline{2x}, ..., \overline{(p-1)x}\}$.

(b) En déduire le petit théorème de Fermat : pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $x^p \equiv x \mod p$, et si $\mathrm{PGCD}(x, p) = 1$, $x^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

(c) Mais (pourquoi "mais" ?) $x^{561} \equiv x \mod 561$ pour tout x.

2. Soit $N \geq 1$ un entier. Soit $x \in \mathbb{Z}$ premier avec N, c'est-à-dire $\bar{x} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$.

   (a) Vérifier que ax est premier avec N si a est premier avec N. Autrement dit, $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ est stable par multiplication.

   (b) Montrer que $ax \equiv bx \mod N$ si, et seulement si $a \equiv b \mod N$. Autrement dit, la multiplication par $\bar{x}$ est une bijection de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ dans lui-même.

   (c) En déduire que le produit $P = \prod_{\alpha \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \alpha$ s'écrit aussi $P = \prod_{\alpha \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \bar{x}\alpha$.

   (d) En remarquant que P est inversible, montrer que $x^{\varphi(N)} \equiv 1 \mod N$.

   (e) A-t-on en général $x^{\varphi(N)} \equiv x \mod N$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$?

Exercice 13. Pourquoi 29 est-il inversible modulo 45 ? Calculer son inverse. Décrire les entiers n vérifiant $29n \equiv 15 \mod 45$.

Exercice 14. Trouver le plus petit entier naturel n tel que $997n - 4$ soit divisible par 1000.

Exercice 15. Résoudre les équations ou systèmes suivants :

1. $(4^{2022} - 1)x + (2^{2023} + 1)y = 10^{2023}$
2. $\begin{cases} 3x - 4y \equiv 1 \mod n \\ 8x + y \equiv 1 \mod n \end{cases}$ pour $n = 5, 6, 7$
3. $16x \equiv 9142 \mod 9999$
4. $6x \equiv 3 \mod n$ pour $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12$
5. $(x^2 + 1)(x^2 + 2) \equiv 0 \mod 5$
6. $x^2 + 3x - 2 \equiv 0 \mod n$ pour $n = 2, 3, 6, 7, 13$.

Exercice 16. Déterminer les entiers n tels que

1. $n^5 - 2$ soit divisible par 7 ;
2. $n^2 + n + 7$ soit divisible par 13 ;
3. $n^2 - 4n - 5$ soit divisible par 17 ;
4. $n^3 - 2n + 6$ soit divisible par 5 ;
5. $2^{2n} + 2^n + 1$ soit divisible par 7 ;
6. $n^3 + n - 2$ soit divisible par 7.

Exercice 17. Résoudre les systèmes de congruences simultanées suivants.

$$1. \begin{cases} x \equiv 12 \mod 17 \\ x \equiv 2 \mod 7 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x \equiv 3 \mod 17 \\ x \equiv 4 \mod 11 \\ x \equiv 5 \mod 6 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x \equiv 6 \mod 9 \\ x \equiv 7 \mod 13 \\ x \equiv 7 \mod 19 \\ x \equiv 12 \mod 17 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 3x \equiv 2 \mod 11 \\ 3x \equiv 4 \mod 7 \\ 7x \equiv 5 \mod 36 \end{cases}.$$

Exercice 18. Dix-sept pirates s'emparent d'un lot de pièces d'or toutes identiques dans un coffre ne pouvant pas en contenir plus de 1500. Leur loi exige un partage à égalité : chacun doit recevoir le même nombre de pièces d'or et, s'il y a un reste, celui-ci est attribué au cuisinier de bord. Dans le cas présent, la part du cuisinier serait de trois pièces, mais les pirates se querellent et six d'entre eux sont tués, ce qui porte la part du cuisinier à quatre pièces. Au cours d'une terrible tempête, le bateau fait naufrage et ne survivent que six pirates et le cuisinier. Par bonheur, le butin est sauvé. La part du cuisinier est maintenant de cinq pièces. Que peut espérer gagner le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste de l'équipage ?