Arithmétique

Feuille bonus

1 Entiers

Exercice 1.

1. Montrer que $\forall a \in \mathbb{N}, a + 0 = 0 + a = a$.
2. Montrer que $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. Montrer que $\forall a \in \mathbb{N}, a + 1 = 1 + a$.
4. En déduire que $\forall a, b \in \mathbb{N}, a + b = b + a$.
5. Montrer que $\forall a, b, n \in \mathbb{N}, a + n = b + n \Rightarrow a = b$
6. Montrer que $\forall a \in \mathbb{N}, a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
7. Montrer que $\forall a \in \mathbb{N}, a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
8. Montrer que $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, a(b + c) = ab + ac$.
9. Montrer que $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, (b + c)a = ba + ca$.
10. Montrer que $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, a(bc) = (ab)c$.
11. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{N}, ab = ba$.
12. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, an = bn \Rightarrow a = b$.

Exercice 2.

1. Soit (u_n) une suite réelle telle qu'il existe une suite (v_n) telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_{n+1} - v_n$$
Montrer que pour $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{N} u_n = v_{N+1} - v_0$ (on appelle cette somme "somme télescopique").
Soit $p \in \mathbb{N}$. Posons $S_N(p) := \sum_{n=0}^{N} n^p$ pour $N \in \mathbb{N}$.
2. Soit $n \leq N$ deux entiers. En développant $(n+1)^{p+1}$ et avec un télescopage bien choisi, trouver une expression de $S_N(p)$ en fonction des $S_N(q)$ avec $q < p$.
On pourra montrer que pour toute famille $(u_{i,j})_{i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{N}}$, on a $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} u_{i,j}$ pour tout n, m.
3. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_N(p)$ est polynomiale en N de degré $p + 1$.
4. Calculer $S_N(4)$ et $S_N(5)$ pour $N \in \mathbb{N}$.
5. Montrer la formule de Faulhaber :
$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}, S_N(p) = \frac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j}B_j n^{p+1-j}$$
où (B_j) est une suite de nombres rationnels (appelés nombres de Bernoulli).

Exercice 3. Montrer que toute partie non-vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum.

Exercice 4. Soit $q \geq 1$ un entier. Trouver un intervalle de longueur q ne contenant pas de nombres premiers.

Exercice 5. Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que X est non vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme $4k+1$ est encore de cette forme.
   On suppose, par l'absurde, que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \dots, p_n\}$.
3. Soit $a = 4p_1p_2 \dots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k+3$.
4. Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.

Exercice 6. Montrer que le produit de quatre entiers consécutifs, augmenté de 1, est un carré parfait.

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{(suite de Fibonacci)}.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathrm{PGCD}(u_n, u_{n+1}) = 1$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $u_{m+n} = u_m u_{n+1} + u_{m-1}u_n$ et en déduire que $\mathrm{PGCD}(u_m, u_n) = u_{\mathrm{PGCD}(m,n)}$ pour m et n non nuls.

2 Division euclidienne

Exercice 8. Un entier de la forme $8n+7$ ne peut pas être la somme de trois carrés parfaits.

Exercice 9. Soit $n \geq 1$ un entier. Déterminer le reste dans la division euclidienne par n de la somme des n premiers entiers strictement positifs.

Exercice 10. Soient a, b, n trois entiers supérieurs ou égaux à 1. On note q le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b, et r le reste. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}.

3 PGCD & PPCM

Exercice 11.

1. Soient $d, m \in \mathbb{N}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le système

$$\begin{cases} \mathrm{PGCD}(x,y) = d \\ \mathrm{PPCM}(x,y) = m \end{cases}$$

   possède un couple $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ solution.
2. Trouver les solutions pour $m = 60$ et $d = 5$.

Exercice 12. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation :

$$\mathrm{PGCD}(x,y) + \mathrm{PPCM}(x,y) = x + y.$$

Exercice 13.

1. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

2. En utilisant l'irrationalité de $\sqrt{2}$, montrer que ce couple de suites est unique.
3. Montrer que $\mathrm{PGCD}(a_n, b_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
   Indication : On pourra calculer $a_n^2 - 2b_n^2$.

Exercice 14. Soient $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, deux nombres premiers entre eux. Soit $\mathcal{S} = \{ax + by \mid (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$. Montrer qu'il existe un entier m_0 tel que pour tout entier $m \geq m_0$, $m \in \mathcal{S}$. Déterminer la valeur minimale de m_0.

4 Théorème fondamental de l'arithmétique

Exercice 15. Soit n un nombre entier, $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers. On note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n.

1. Montrer que $d(n) = \prod_{i=1}^{r}(\alpha_i + 1)$.
2. En déduire que n est un carré parfait si et seulement si $d(n)$ est impair.
3. Montrer que $\prod_{d|n} d = \sqrt{n}^{d(n)}$.

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. En comparant $\binom{2n+1}{n}$ et $\binom{2n+1}{n+1}$, montrer que $\binom{2n+1}{n} \leq 2^{2n}$.
   Écrire 2^{2n+1} comme une somme de coefficients binomiaux.
2. Montrer que
$$\prod_{p\in\mathbb{P}, n+1<p\leq 2n+1} p \text{ divise } \binom{2n+1}{n}.$$
3. En raisonnant par récurrence forte sur m, montrer que pour tout $m \geq 2$:
$$\prod_{p\in\mathbb{P}, p\leq m} p \leq 4^{m-1}.$$
   On pourra distinguer le cas premier et non-premier (qui est impair pour $m \geq 3$).

Exercice 17 (Formule de Legendre)**.** Soient $n \geq 1$ un entier et $p \geq 2$ un nombre premier. Soit N le plus petit entier tel que $p^N \geq n$.

1. Soit $u \geq 1$ un entier. Combien y a-t-il de multiples de u dans $\{1, \dots, n\}$?
2. Soient $k \geq 1$ et $A_k \coloneqq \left\{l \in \{1, \dots, n\} \mid v_p(l) = k\right\}$. Calculer le cardinal de A_k.
3. En déduire la formule de Legendre :
$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{N} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$
4. Par combien de zéros se termine le nombre 1000! ?

5 Systèmes de numération

Exercice 18. 1. Déterminer en fonction de $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ le nombre de chiffres de n en base 10.

2. Soit $\sigma(n)$ la somme des chiffres de n en base 10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
$$1 \leq \sigma(n) \leq 9(1 + \lfloor\log_{10}(n)\rfloor).$$

Exercice 19. 1. Existe-t-il une base a de numération dans laquelle $\overline{82}^a = 3 \times \overline{28}^a$

2. Existe-t-il une base b de numération dans laquelle $\overline{23}^b + \overline{53}^b = \overline{80}^b$?

Exercice 20. On a utilisé 6881 caractères d'imprimeries pour numéroter les pages (en base 10) d'un livre. Combien de pages ce livre contient-il ?

Exercice 21. Soit $P \in \mathbb{N}[X]$ un polynôme dont tous les coefficients sont des entiers naturels. Trouver ses coefficients en deux évaluations.

6 Arithmétique modulaire

Exercice 22. Démontrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9.

Exercice 23.

1. Montrer qu'il existe un multiple de 23 qui ne s'écrive qu'avec des 1 en base 10.
   Montrer que cela est équivalent $10^n - 1 \equiv 0 \mod 23$.

2. À quelle condition nécessaire et suffisante sur $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ existe-t-il un multiple de m ne s'écrivant qu'avec des 1 ?

Exercice 24. Soit A la somme des chiffres de 4444^{4444} et B la somme des chiffres de A. Trouver la somme des chiffres de B (la numération est la numération décimale).

Exercice 25. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^7 \equiv n \mod 42$.

Exercice 26. Considérons $n \in \mathbb{N}$ entiers dont la somme est nulle. Montrer que la somme de leurs puissances 37-ièmes est divisible par 399.