L1 MPC-MI-DL ; L2 PPPE
2023-2024

Arithmétique des polynômes

Feuille 1

Exercice 1. Dans $\mathbb{C}[X]$, considérons les polynômes $A = X^3 + iX + i$ et $B = X^2 + X + i$ et les trois polynômes

$$\begin{cases} P = 2A - XB \\ Q = (X+i)A + (X-i)B \\ R = (X - 2i + 1)A - (X^2 - 2iX + 2i)B \end{cases}$$

Calculer P, Q, R et préciser leurs degrés.

Exercice 2. Soient $A = (X+1)^3$ et $B = (1-X)^3$.

1. Que valent les degrés de A et B ?
2. Sans calcul, que peut-on dire de $\deg(A+B)$ et de $\deg(A-B)$?
3. Calculer $A+B$ et $A-B$ et leurs degrés.

Exercice 3. Considérons les polynômes $A = \overline{2}X^3 - \overline{3}X + \overline{5}$ et $B = \overline{3}X^4 - \overline{3}X^2 + \overline{2}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Calculer $A+B$ et AB et préciser leurs termes dominants. Que peut-on remarquer ? Expliquer.

Exercice 4.

1. Calculer le produit $(1+X)(1+X^2)(1+X^4)$.
2. Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \prod_{k=0}^{n} (1 + X^{2^k}) = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{2^{n+1}-1}.$$

Exercice 5. Vérifier que $(X^3 - X^2 + 1)(X^2 + X + 1) = X^5 + X + 1$; en déduire des factorisations de $X^5 + X - 1$ et de 100 009.

Exercice 6. Pour $A = X^3 - 2X + 1$, $P = X + 1$ et $Q = X^2$, calculer $A(P)$, $P(A)$, $A(Q)$, $Q(A)$.

Exercice 7. Soient $P_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $P_n = (1 + nX)P_{n-1}$.

1. Calculer P_1, P_2 et P_3.
2. Quel est le coefficient dominant de P_n ?
3. Calculer $P_n(1)$ et $P_n(0)$.

Exercice 8. Faire la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{C}[X]$:

A	B
8	3
$2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$	$X^2 - 3X + 1$
$X^3 - 3X^2 - X - 1$	$3X^2 - 2X + 1$
$X^3 - X^2 - X$	$X - 1 + 2i$

Exercice 9. (*) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P \circ P - X$ est divisible par $P - X$.

Exercice 10. Quels sont les polynômes de degré 4 congrus à X modulo $X^2 + 1$?

Exercice 11. Trouver les réels a et b pour que $X^2 - 2X + 1$ divise $X^5 + X^4 + aX^3 + bX^2 + 5X - 2$.

Exercice 12. Les restes des divisions euclidiennes d'un polynôme A par $X - 1$ et $X - 2$ sont respectivement 4 et 5. Quel est le reste de la division euclidienne de A par $(X-1)(X-2)$?

Exercice 13. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ divisibles par leur dérivé P' pour

1. (*) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et en déduire le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
2. (**) pour $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$ quelconque grâce au développement de Taylor.

Exercice 14. Déterminer les racines complexes du polynôme $P = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ et en déduire sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 15. Déterminer a et b dans $\mathbb{C}$ de manière que les racines de $P = X^4 - 26X^3 + 231X^2 + aX + b$ soient en progression arithmétique.

Exercice 16. Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients réels possédant n racines réelles distinctes.

1. Montrer que P' possède exactement $n - 1$ racines réelles distinctes. (Utiliser le théorème de Rolle.)
2. (*) En déduire que toutes les racines (complexes) de $P^2 + 1$ sont simples.

Exercice 17. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer le reste de la division euclidienne de $F_a = (X\sin(a) + \cos(a))^n$ puis $G_a = (X\cos(a) + \sin(a))^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $A_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ est divisible par $(X - 1)^3$.

Exercice 19. Soit p un nombre premier. Considérons le polynôme $P = X^p$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Quelle est la multiplicité de la racine 0 de P ? Calculer les dérivés de P. Que peut-on remarquer ?

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $X^2 - X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 21. (*) Soit $n \in \mathbb{N}$ et considérons le polynôme $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que P_n n'a pas de racine multiple (regarder $P_n - P_n'$) pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout n, P_{2n} n'a pas de racine réelle et P_{2n+1} a une unique racine réelle.