Arithmétique des polynômes

Feuille 2

Exercice 1. Calculer le PGCD (dans $\mathbb{K}[X]$) de 27 et 42.

Exercice 2.
1. Les polynômes $A = X^2 + X + 1$ et $B = X - 1$ sont-ils premiers entre eux ?
2. Même question avec $A = X^2 - X$ et $B = X^2 - 1$.
3. Calculer PPCM(A, B) dans chacun des cas.

Exercice 3. Déterminer une identité de Bézout entre $P = (X - 1)^2$ et $Q = X^2 + 1$.

Exercice 4. Soient $P = 2X^4 + X^3 - 2X - 1$ et $Q = 2X^4 - X^3 - 3X^2 + X + 1$. Déterminer une identité de Bézout entre P et Q et en déduire leurs racines communes.

Exercice 5. Le polynôme $P = X^4 + 16$ est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$? Si la réponse est négative, donner la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6. Décomposer $P = X^4 + X^2 + 1$ en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Soient $P = X^6 + 2X^5 + 4X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 2X + 1$ et $j = e^{2i\pi/3} \in \mathbb{C}$. Montrer que j est une racine multiple de P puis factoriser P sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Soit $A = X^3 - 3X + a \in \mathbb{R}[X]$.
1. Pour quelles valeurs de a ce polynôme admet-il une racine double ?
2. Pour chacune de ces valeurs, décomposer A en produits de facteurs irréductibles (dans $\mathbb{R}[X]$).

Exercice 9. Soient $P = X^3 - X^2 - X - 2$ et $Q = X^3 - 1$ deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$.
1. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le PGCD de P et de Q.
2. Retrouver le résultat précédent en factorisant P et Q sur $\mathbb{R}$.
3. Décomposer P et Q en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 10. (*) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0.$$

1. Montrer que le coefficient dominant de P est positif et que les racines réelles de P sont de multiplicité paire.
2. Montrer qu'il existe un polynôme $C \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = C\overline{C}$.
3. En déduire qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

Exercice 11. Calculer le PGCD de $P = X^6 - X^4 - X^2 + 1$ et $Q = X^4 + 2X^3 - 2X - 1$, et en déduire les racines communes de P et Q ainsi que leurs multiplicités.

Exercice 12. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire, de degré 3 et ayant trois racines x_1, x_2, x_3 telles que $x_1 + x_2 + x_3 = 4$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 5$ et $x_1x_2x_3 = 6$. Écrire P sous la forme $X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ et en déduire les valeurs x_1, x_2, x_3.

Exercice 13. Déterminer $m \in \mathbb{C}$ pour que $P = X^3 + X^2 + mX + 6$ ait deux racines dont la somme et le produit coïncident ; expliciter alors ces racines.

Exercice 14. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ les racines de $P = X^3 + pX + q$. Exprimer

$$\begin{cases} A = a^2 + b^2 + c^2 \\ B = a^2 + b^3 + c^3 \\ C = a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 \end{cases}$$

en fonction de p et q.

Exercice 15. (*) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Soit u_k la somme des racines de $P^{(k)}$ avec $0 \leq k < \deg(P)$. Montrer que $u_0, \ldots, u_{\deg(P)-1}$ sont en progression arithmétique.

Exercice 16. Soient A et B deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Notons R leur PGCD dans $\mathbb{R}$ et S leur PGCD dans $\mathbb{C}$. Justifier que $R = S$.

Exercice 17. Soient a et b des entiers naturels non nuls. Montrer que

$$\mathrm{PGCD}(X^a - 1, X^b - 1) = X^{\mathrm{PGCD}(a,b)} - 1$$

Exercice 18. Résoudre les équations diophantiennes suivantes :

- $(X^2 - 1)U + (X^2 - 3X + 2)V = (X + 1)$,
- $(X^2 + 1)U + (X - 1)V = 1$,
- pour B fixé, $(X^2 - 1)T + (X^2 - 3X + 2)R = (X - 1)B$,
- $(X^2 + 1)U + (X^2 - 1)T + (X^2 - 3X + 2)R = 1$.

Exercice 19. Résoudre les systèmes de congruences suivants :

- $\begin{cases} P \equiv X - 1[X^2 + 1] \\ P \equiv X - 1[X^2 - 1] \end{cases}$
- $\begin{cases} P \equiv X + 5[X^2] \\ P \equiv 0[X + 1] \end{cases}$
- $\begin{cases} P \equiv 6X + 7[X^2] \\ P \equiv 3[X + 1] \end{cases}$
- $\begin{cases} P \equiv 1[X^2 + 1] \\ P \equiv X - 1[X^3 - X^2 + X] \end{cases}$

Exercice 20. Résoudre les systèmes de congruences suivants :

- $\begin{cases} P \equiv 1[X^2 - 1] \\ P \equiv X - 1[X^3 - 3X^2 + 2X] \end{cases}$
- $\begin{cases} P \equiv 1[X^2 - 1] \\ P \equiv X^2[X^3 - 3X^2 + 2X] \end{cases}$

Exercice 21. (*)

1. Justifier sans calcul que pour $(a_1, \ldots, a_n)$ une famille de nombres complexes distincts, et $(l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{C}^n$, il existe un unique polynôme de degré strictement plus petit que n tel que

$$\begin{cases} P(a_1) = l_1 \\ \quad\vdots \\ P(a_n) = l_n \end{cases}$$

2. Trouver un tel polynôme.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que les deux conditions sont équivalentes :
   - Pour tout $z \in \mathbb{Q}$, $P(z) \in \mathbb{Q}$;
   - $P \in \mathbb{Q}[X]$.