L1 MPC-MI-DL ; L2 PPPE
2024-2025

Arithmétique des polynômes

Feuille de travaux dirigés

Exercice 1. Dans $\mathbb{C}[X]$, considérons les polynômes $A = X^3 + iX + i$ et $B = X^2 + X + i$ et les trois polynômes

$$\begin{cases} P = 2A - XB \\ Q = (X+i)A + (X-i)B \\ R = (X-2i+1)A - (X^2 - 2iX + 2i)B \end{cases}$$

Calculer P, Q, R et préciser leurs degrés.

Exercice 2. Soient $A = (X+1)^3$ et $B = (1-X)^3$.

1. Que valent les degrés de A et B ?
2. Sans calcul, que peut-on dire de $\deg(A+B)$ et de $\deg(A-B)$?
3. Calculer $A+B$ et $A-B$ et leurs degrés.

Exercice 3. Considérons les polynômes $A = \overline{2}X^3 - \overline{3}X + \overline{5}$ et $B = \overline{3}X^4 - \overline{3}X^2 + \overline{2}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Calculer $A+B$ et AB et préciser leurs termes dominants. Que peut-on remarquer ? Expliquer.

Exercice 4.
1. Calculer le produit $(1+X)(1+X^2)(1+X^4)$.
2. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \prod_{k=0}^{n}(1 + X^{2^k}) = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{2^{n+1}-1}.$$

Exercice 5. Vérifier que $(X^3 - X^2 + 1)(X^2 + X + 1) = X^5 + X + 1$; en déduire des factorisations de $X^5 + X - 1$ et de 100 009.

Exercice 6. Pour $A = X^3 - 2X + 1$, $P = X + 1$ et $Q = X^2$, calculer $A(P)$, $P(A)$, $A(Q)$, $Q(A)$.

Exercice 7. Soient $P_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $P_n = (1 + nX)P_{n-1}$.

1. Calculer P_1, P_2 et P_3.
2. Quel est le coefficient dominant de P_n ?
3. Calculer $P_n(1)$ et $P_n(0)$.

Exercice 8. Faire la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{C}[X]$:

A	B
8	3
$2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$	$X^2 - 3X + 1$
$X^3 - 3X^2 - X - 1$	$3X^2 - 2X + 1$
$X^3 - X^2 - X$	$X - 1 + 2i$

Exercice 9. (*) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P \circ P - X$ est divisible par $P - X$.

Exercice 10. Quels sont les polynômes de degré 4 ont pour reste X pour la division euclidenne par $X^2 + 1$?

Exercice 11. Trouver les réels a et b pour que $X^2 - 2X + 1$ divise $X^5 + X^4 + aX^3 + bX^2 + 5X - 2$.

Exercice 12. Les restes des divisions euclidiennes d'un polynôme A par $X - 1$ et $X - 2$ sont respectivement 4 et 5. Quel est le reste de la division euclidienne de A par $(X - 1)(X - 2)$?

Exercice 13. (*) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à coefficients complexes. Montrer que

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} P^{(k)}$$

Indication : considérer dans un premier temps $P = X^n$.

Exercice 14 (CC 2023)**.** (*) Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Supposons que $P(a) > 0$, et pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $P^{(k)}(a) \geq 0$. Montrer que P n'a pas de racine sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

Exercice 15. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ divisibles par leur dérivé P' pour

1. (*) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et en déduire le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
2. (**) pour $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$ quelconque grâce au développement de Taylor.

Exercice 16. Déterminer les racines complexes du polynôme $P = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ et en déduire sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 17. Déterminer a et b dans $\mathbb{C}$ de manière que les racines de $P = X^4 - 26X^3 + 231X^2 + aX + b$ soient en progression arithmétique.

Exercice 18. (*) Soit $\mathbb{K}$ un corps infini (en particulier, si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Montrer que la fonction $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto f_P \in \mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) := \{\text{fonctions } \mathbb{K} \to \mathbb{K}\}$ est injective.

Exercice 19. (*) Quels sont les racines de $X^2 - X$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$? Que peut-on remarquer ? Expliquer.

Exercice 20. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et P un polynôme à coefficients réels de degré n possédant n racines réelles distinctes.

1. Montrer que P' possède exactement $n - 1$ racines réelles distinctes. (Utiliser le théorème de Rolle.)
2. (*) En déduire que toutes les racines (complexes) de $P^2 + 1$ sont simples.
3. (**) Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $P' + aP$ a aussi n racines réelles distinctes.
   On pourra considérer la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ax}P(x) \in \mathbb{R}$.

Exercice 21. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer le reste de la division euclidienne de $F_a = (X\sin(a) + \cos(a))^n$ puis $G_a = (X\cos(a) + \sin(a))^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 22. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $A_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ est divisible par $(X - 1)^3$.

Exercice 23. (*) Soit p un nombre premier. Considérons le polynôme $P = X^p$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Quelle est la multiplicité de la racine $\overline{0}$ de P ? Calculer les dérivés de P. Que peut-on remarquer ?

Exercice 24. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $X^2 - X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 25 (Seconde chance, 2023)**.** (*)

1. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Démontrer que si P admet une racine dans $\mathbb{Z}$, alors celle-ci divise a_0.
2. Les polynômes $X^3 - X^2 - 109X - 11$ et $X^{10} + X^5 + 1$ ont-ils des racines dans $\mathbb{Z}$?

Exercice 26 (CC 2024)**.** (*) Soit P un polynôme non-constant à coefficients complexes.

1. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{C} \mapsto P(x) \in \mathbb{C}$ est surjective. Montrer que ce n'est pas le cas si on prend un polynôme à coefficients réels et qu'on considère la fonction polynomiale $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ associée.

2. Trouver l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que le polynôme $P - \lambda$ soit scindé à racines simples.

Exercice 27. (*) Soit $n \in \mathbb{N}$ et considérons le polynôme $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que P_n n'a pas de racine multiple (regarder $P_n - P_n'$) pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout n, P_{2n} n'a pas de racine réelle et P_{2n+1} a une unique racine réelle.

Exercice 28. Calculer le PGCD (dans $\mathbb{K}[X]$) de 27 et 42.

Exercice 29.
1. Les polynômes $A = X^2 + X + 1$ et $B = X - 1$ sont-ils premiers entre eux ?
2. Même question avec $A = X^2 - X$ et $B = X^2 - 1$.
3. Calculer PPCM(A, B) dans chacun des cas.

Exercice 30. Déterminer une identité de Bézout entre $P = (X - 1)^2$ et $Q = X^2 + 1$.

Exercice 31. Soient $P = 2X^4 + X^3 - 2X - 1$ et $Q = 2X^4 - X^3 - 3X^2 + X + 1$. Déterminer une identité de Bézout entre P et Q et en déduire leurs racines communes.

Exercice 32. Le polynôme $P = X^4 + 16$ est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$? Si la réponse est négative, donner la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 33. Décomposer $P = X^4 + X^2 + 1$ en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 34. Soient $P = X^6 + 2X^5 + 4X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 2X + 1$ et $j = e^{2i\pi/3} \in \mathbb{C}$. Montrer que j est une racine multiple de P puis factoriser P sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

Exercice 35. Soit $A = X^3 - 3X + a \in \mathbb{R}[X]$.

1. Pour quelles valeurs de a ce polynôme admet-il une racine double ?
2. Pour chacune de ces valeurs, décomposer A en produits de facteurs irréductibles (dans $\mathbb{R}[X]$).

Exercice 36. Soient $P = X^3 - X^2 - X - 2$ et $Q = X^3 - 1$ deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

1. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le PGCD de P et de Q.
2. Retrouver le résultat précédent en factorisant P et Q sur $\mathbb{R}$.
3. Décomposer P et Q en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 37 (Seconde chance, 2024)**.** (*)

1. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes tels que A^2 divise B^2. Montrer que A divise B.
2. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes non-nuls. Montrer que A et B sont premiers entre eux si, et seulement si, $A + B$ et AB sont premiers entre eux.
   Indication : On pourra montrer que si A et B sont premiers entre eux alors A et $A + B$ aussi.

Exercice 38. (*) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0.$$

1. Montrer que le coefficient dominant de P est positif et que les racines réelles de P sont de multiplicité paire.
2. Montrer qu'il existe un polynôme $C \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = C\overline{C}$.
3. En déduire qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

Exercice 39. (**) Le but de cet exercice est de trouver les polynômes divisibles par leur dérivé second.
Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{C}[X]$ satisfaisant cette condition, et n son degré.

1. Montrer que P admet au plus une racine multiple.
   Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une racine simple de P alors on ne peut rien dire sur la valeur $P''(\lambda)$ (alors que $P'(\lambda) \neq 0$)
2. Si P admet une racine multiple s de multiplicité α, en notant $Q \in \mathbb{K}[X]$ le polynôme tel que $P = Q(X - s)^\alpha$, trouver une équation différentielle satisfaite par Q et en déduire que $\alpha = n$. Que peut-on en déduire ?
3. Caractériser les polynômes P de degré inférieur ou égal à 3 tels que P'' divise P, et sans racine multiple.

Exercice 40. Calculer le PGCD de $P = X^6 - X^4 - X^2 + 1$ et $Q = X^4 + 2X^3 - 2X - 1$, et en déduire les racines communes de P et Q ainsi que leurs multiplicités.

Exercice 41. (*) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à coefficients complexes degré n. Soit $\omega := e^{\frac{2i\pi}{n+1}}$ une racine de l'unité.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} P(\omega^k) = (n+1)a_0$.
2. Plus généralement, calculer $\sum_{k=0}^{n} \omega^{-k\ell} P(\omega^k)$ pour $0 \leq \ell \leq n$
3. Posons $M := \sup_{|z|=1} |P(z)|$. Montrer que

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, |a_k| \leq M.$$

Exercice 42. (**) Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à coefficients complexes unitaire. Montrer que si ξ est une racine de P alors

$$|\xi| \leq 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} |a_k|.$$

On pourra dissocier le cas $|\xi| \leq 1$ et $|\xi| > 1$.

Exercice 43. (*) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients réels unitaire de degré $n \in \mathbb{N}$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\forall z \in \mathbb{C}, |\mathrm{Im}(z)|^n \leq |P(z)|.$$

Exercice 44. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire, de degré 3 et ayant trois racines x_1, x_2, x_3 telles que $x_1+x_2+x_3 = 4$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 5$ et $x_1x_2x_3 = 6$. Écrire P sous la forme $X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ et en déduire les valeurs x_1, x_2, x_3.

Exercice 45. Déterminer $m \in \mathbb{C}$ pour que $P = X^3 + X^2 + mX + 6$ ait deux racines dont la somme et le produit coïncident ; expliciter alors ces racines.

Exercice 46. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ les racines de $P = X^3 + pX + q$. Exprimer

$$\begin{cases} A = a^2 + b^2 + c^2 \\ B = a^3 + b^3 + c^3 \\ C = a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 \end{cases}$$

en fonction de p et q.

Exercice 47. (*) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Soit u_k la somme des racines de $P^{(k)}$ avec $0 \leq k < \deg(P)$. Montrer que $u_0, \ldots, u_{\deg(P)-1}$ sont en progression arithmétique.

Exercice 48. Soient A et B deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Notons R leur PGCD dans $\mathbb{R}$ et S leur PGCD dans $\mathbb{C}$. Justifier que $R = S$.

Exercice 49. Soient a et b des entiers naturels non nuls. Montrer que

$$\mathrm{PGCD}(X^a - 1, X^b - 1) = X^{\mathrm{PGCD}(a,b)} - 1$$

Exercice 50. Résoudre les équations diophantiennes suivantes :

- $(X^2 - 1)U + (X^2 - 3X + 2)V = (X + 1)$,
- $(X^2 + 1)U + (X - 1)V = 1$,
- pour B fixé, $(X^2 - 1)T + (X^2 - 3X + 2)R = (X - 1)B$,
- $(X^2 + 1)U + (X^2 - 1)T + (X^2 - 3X + 2)R = 1$.

Exercice 51. Résoudre les systèmes de congruences suivants :

— $\begin{cases} P \equiv X-1[X^2+1] \\ P \equiv X-1[X^2-1] \end{cases}$

— $\begin{cases} P \equiv X+5[X^2] \\ P \equiv 0[X+1] \end{cases}$

— $\begin{cases} P \equiv 6X+7[X^2] \\ P \equiv 3[X+1] \end{cases}$

— $\begin{cases} P \equiv 1[X^2+1] \\ P \equiv X-1[X^3-X^2+X] \end{cases}$

Exercice 52. Résoudre les systèmes de congruences suivants :

— $\begin{cases} P \equiv 1[X^2-1] \\ P \equiv X-1[X^3-3X^2+2X] \end{cases}$

— $\begin{cases} P \equiv 1[X^2-1] \\ P \equiv X^2[X^3-3X^2+2X] \end{cases}$

Exercice 53. (*)

1. Justifier sans calcul que pour $(a_1, \ldots, a_n)$ une famille de nombres complexes distincts, et $(l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{C}^n$, il existe un unique polynôme de degré strictement plus petit que n tel que

$$\begin{cases} P(a_1) = l_1 \\ \quad\vdots \\ P(a_n) = l_n \end{cases}$$

2. Trouver un tel polynôme.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que les deux conditions sont équivalentes :
   — Pour tout $z \in \mathbb{Q}$, $P(z) \in \mathbb{Q}$;
   — $P \in \mathbb{Q}[X]$.

Exercice 54.

1. (*) Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) \in \mathbb{R}$;
2. (*) Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que pour tout $z \in \mathbb{R}$, $P(z) \in \mathbb{R}$;
3. (**) Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que pour tout $z \in \mathbb{R}$, $P(z) \in \mathbb{Q}$;
   On pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.
4. (**) Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que pour tout $z \in \mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $P(z) \in \mathbb{S}^1$.
   On considérera le polynôme réciproque de P : si P est le polynôme $\sum_{i=0}^n a_i X^i$ (avec $a_n \neq 0$) alors son polynôme réciproque est $\sum_{i=0}^n a_{n-i} X^i = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$.

Exercice 55. Trouver les fractions rationnelles $F \in \mathbb{C}(X)$ (si elles existent) telles que

1. $F^2 = X^3$;
2. $F^3 = 1$;
3. $(X-1)F^3 = \frac{X^3}{X^2-2X+1}$.

Exercice 56. (*) Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}$ dont la dérivée est $\frac{1}{X}$.

Exercice 57. (*) Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Montrer que si $\deg(F') < \deg(F) - 1$ alors $\deg(F) = 0$.

Exercice 58. (*) Soient F et G deux fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$ prenant la même valeur en une infinité de points (distincts) de $\mathbb{K}$. Montrer que $F = G$.

Exercice 59. Trouver les coefficients réels a, b, c et d tels que

$$\frac{X^3+2X-5}{X-1} = aX^2 + bX + c + \frac{d}{X-1}.$$

Exercice 60. Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$:

1. $\dfrac{X^5+X+1}{X^4-1}$
2. $\dfrac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}$
3. $\dfrac{X^2+1}{X^4+1}$

Exercice 61 (Seconde chance 2024)**.** Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle suivante

$$\frac{4X^2-13X+13}{X^4+4X^3+5X^2+8X+6}.$$

Indication : Le dénominateur a deux racines « évidentes ».

Exercice 62.

1. Calculer les primitives des fonctions

$$x\in\mathbb{R}\mapsto\frac{1}{x^2-2x+2}\in\mathbb{R},\quad x\in[2,3]\mapsto\frac{1}{x^2-5x+4}\in\mathbb{R},\quad x\in[\pi,17]\mapsto\frac{4x-1}{(x-3)(x^2+1)}\in\mathbb{R},$$
$$x\in\mathbb{R}\mapsto\frac{1}{x^4+1}\in\mathbb{R}.$$

2. Calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^2\frac{x^4}{x^2+4}\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2-6}$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(x)\mathrm{d}x}{\sin^2(x)-5\sin(x)+6}$.

Exercice 63.

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$.
2. En déduire que $\frac{22}{7}>\pi$.

Exercice 64 (CC 2024)**.** Calculer

$$\int_0^1\frac{x^4+2x^3+5x^2+9x+10}{x^3+2x^2+2x+4}\mathrm{d}x$$

Exercice 65. (**) Le but de cet exercice est de montrer le théorème de Gauß-Lucas : les racines du dérivé d'un polynôme complexe non-constant P sont dans l'enveloppe convexe des zéros de P i.e. si $z_1,\dots,z_n$ sont les racines de P, les racines de P' sont dans l'ensemble

$$\mathrm{Conv}(z_1,\dots,z_n)\coloneqq\left\{\sum_{i=1}^n\lambda_iz_i\mid\lambda_i\in\mathbb{R}_{\geq0},\sum_{i=1}^n\lambda_i=1\right\}.$$

1. Montrer que ce théorème est vrai si $\deg(P)=2$.
2. Soit $\mathcal{L}:\mathbb{C}[X]\backslash\{0\}\to\mathbb{C}(X)$ l'application associant à un polynôme P sa « dérivée logarithmique » $\frac{P'}{P}$. Montrer que, pour toute paire de polynômes (P,Q),
$$\mathcal{L}(PQ)=\mathcal{L}(P)+\mathcal{L}(Q).$$
3. En déduire la décomposition en éléments simples de $\mathcal{L}(P)$ pour un polynôme complexe non-constant $P=\lambda\prod_{i=1}^n(X-a_i)^{n_i}$ (on pourra commencer avec le cas $n=1$).
4. Soit z une racine de P' qui n'annule pas P. Montrer que
$$\left(\sum_{i=1}^n\frac{n_i}{|z-a_i|^2}\right)z=\sum_{i=1}^n\frac{n_i}{|z-a_i|^2}a_i$$
5. Conclure.

Exercice 66. (**)

1. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme dont toutes les racines sont réelles.
Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$$P'^2(x)\geq P(x)P''(x).$$
Calculer la dérivée de $\frac{P'}{P}$ et utiliser ce que l'on a trouvé dans l'exercice précédent.
2. Réciproquement, si pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$P'^2(x)\geq P(x)P''(x),$$
P a-t-il toutes ses racines réelles ?