Exercice 1

Énoncé (partie 1)

Les applications suivantes sont-elles linéaires? Lorsqu'elles le sont, déterminer leur noyau et image.

1. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$.
2. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x + 3y, x)$
3. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (y, x + y - \sqrt{x^2})$.
4. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x - y, xy)$.
5. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x - y, y + x, \sin(z))$.
6. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, y + x, z)$

Question 1

L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$

Question 1

L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ n'est pas linéaire.

Question 1

L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ n'est pas linéaire.
En effet, en posant $x = 1$ et $\lambda = 2$ on obtient $f(\lambda x) = 8$ mais $\lambda f(x) = 2$.

Question 2

L'application $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x + 3y, x)$

Question 2

L'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x + 3y, x)$ est linéaire

Question 2

L'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x + 3y, x)$ est linéaire puisque ses deux composantes $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x + 3y$ et $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ sont des formes linéaires (car combinaisons linéaires de formes coordonnées).

Question 2

L'application $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x + 3y, x)$ est linéaire puisque ses deux composantes $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x + 3y$ et $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ sont des formes linéaires (car combinaisons linéaires de formes coordonnées).

Calculons son noyau.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in \ker(f)$

Question 2

L'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x + 3y, x)$ est linéaire puisque ses deux composantes $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x + 3y$ et $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ sont des formes linéaires (car combinaisons linéaires de formes coordonnées).

Calculons son noyau.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in \ker(f)$ si, et seulement si, $f(x, y) = (0, 0)$,

Question 2

L'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x + 3y, x)$ est linéaire puisque ses deux composantes $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x + 3y$ et $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ sont des formes linéaires (car combinaisons linéaires de formes coordonnées).

Calculons son noyau.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in \ker(f)$ si, et seulement si, $f(x, y) = (0, 0)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $2x + 3y = 0$ et $x = 0$

Question 2

L'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x + 3y, x)$ est linéaire puisque ses deux composantes $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x + 3y$ et $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ sont des formes linéaires (car combinaisons linéaires de formes coordonnées).

Calculons son noyau.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in \ker(f)$ si, et seulement si, $f(x, y) = (0, 0)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $2x + 3y = 0$ et $x = 0$ donc si, et seulement si, $x = y = 0$.

Question 2

L'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x + 3y, x)$ est linéaire puisque ses deux composantes $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x + 3y$ et $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ sont des formes linéaires (car combinaisons linéaires de formes coordonnées).

Calculons son noyau.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in \ker(f)$ si, et seulement si, $f(x, y) = (0, 0)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $2x + 3y = 0$ et $x = 0$ donc si, et seulement si, $x = y = 0$.

On a donc $\ker(f) = \{(0, 0)\}$

Question 2

L'application $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x + 3y, x)$ est linéaire puisque ses deux composantes $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x + 3y$ et $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ sont des formes linéaires (car combinaisons linéaires de formes coordonnées).

Calculons son noyau.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in \ker(f)$ si, et seulement si, $f(x, y) = (0, 0)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $2x + 3y = 0$ et $x = 0$ donc si, et seulement si, $x = y = 0$.

On a donc $\ker(f) = \{(0, 0)\}$ et f est injective.

Question 2

L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x + 3y, x)$ est linéaire puisque ses deux composantes $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x + 3y$ et $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ sont des formes linéaires (car combinaisons linéaires de formes coordonnées).

Calculons son noyau.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in \ker(f)$ si, et seulement si, $f(x, y) = (0, 0)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $2x + 3y = 0$ et $x = 0$ donc si, et seulement si, $x = y = 0$.

On a donc $\ker(f) = \{(0, 0)\}$ et f est injective.

Calculons son image.

On a $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1, 0), f(0, 1))$

Question 2

L'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x + 3y, x)$ est linéaire puisque ses deux composantes $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x + 3y$ et $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ sont des formes linéaires (car combinaisons linéaires de formes coordonnées).

Calculons son noyau.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in \ker(f)$ si, et seulement si, $f(x, y) = (0, 0)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $2x + 3y = 0$ et $x = 0$ donc si, et seulement si, $x = y = 0$.

On a donc $\ker(f) = \{(0, 0)\}$ et f est injective.

Calculons son image.

On a $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1, 0), f(0, 1)) = \mathrm{Vect}((2, 1), (3, 0))$

Question 2

L'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x + 3y, x)$ est linéaire puisque ses deux composantes $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x + 3y$ et $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ sont des formes linéaires (car combinaisons linéaires de formes coordonnées).

Calculons son noyau.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in \ker(f)$ si, et seulement si, $f(x, y) = (0, 0)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $2x + 3y = 0$ et $x = 0$ donc si, et seulement si, $x = y = 0$.
On a donc $\ker(f) = \{(0, 0)\}$ et f est injective.

Calculons son image.

On a $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1, 0), f(0, 1)) = \mathrm{Vect}((2, 1), (3, 0)) = \mathbb{R}^2$ (puisque les vecteurs $(2, 1)$ et $(3, 0)$ ne sont pas colinéaires).

Question 2

L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x + 3y, x)$ est linéaire puisque ses deux composantes $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x + 3y$ et $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ sont des formes linéaires (car combinaisons linéaires de formes coordonnées).

Calculons son noyau.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in \ker(f)$ si, et seulement si, $f(x, y) = (0, 0)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $2x + 3y = 0$ et $x = 0$ donc si, et seulement si, $x = y = 0$.

On a donc $\ker(f) = \{(0, 0)\}$ et f est injective.

Calculons son image.

On a $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1, 0), f(0, 1)) = \mathrm{Vect}((2, 1), (3, 0)) = \mathbb{R}^2$ (puisque les vecteurs $(2, 1)$ et $(3, 0)$ ne sont pas colinéaires).

En particulier f est surjective (et donc bijective).

Remarque : on aurait pu aussi utiliser le théorème du rang dont un corollaire est que tout endomorphisme injectif (ce qui est le cas de f) est un isomorphisme.

Question 3

L'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (y, x + y - \sqrt{x^2})$

Question 3

L'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (y, x + y - \sqrt{x^2})$ n'est pas linéaire.

Question 3

L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (y, x + y - \sqrt{x^2})$ n'est pas linéaire. En effet, sa seconde composante $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y - \sqrt{x^2}$ ne l'est pas

Question 3

L'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (y, x+y-\sqrt{x^2})$ n'est pas linéaire. En effet, sa seconde composante $f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+y-\sqrt{x^2}$ ne l'est pascar si $(x,y)=(1,0)$ et $\lambda=-1$ on obtient $f_2(\lambda x, \lambda y) = -2$ mais $\lambda f(x,y) = 0$.

Question 4

L'application $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x - y, xy)$

Question 4

L'application $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x - y, xy)$ n'est pas linéaire.

Question 4

L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x - y, xy)$ n'est pas linéaire. En effet, sa seconde composante $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$ ne l'est pas

Question 4

L'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x - y, xy)$ n'est pas linéaire. En effet, sa seconde composante $f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$ ne l'est pas car si $(x, y) = (1, 1)$ et $\lambda = -1$ on obtient $f_2(\lambda x, \lambda y) = 1$ mais $\lambda f(x, y) = -1$.

Question 5

L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x - y, y + x, \sin(z))$

Question 5

L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x - y, y + x, \sin(z))$ n'est pas linéaire.

Question 5

L'application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x - y, y + x, \sin(z))$ n'est pas linéaire. En effet, sa troisième composante $f_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto \sin(z)$ ne l'est pas

Question 5

L'application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x - y, y + x, \sin(z))$ n'est pas linéaire. En effet, sa troisième composante $f_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto \sin(z)$ ne l'est pas car si $(x, y, z) = (0, 0, \frac{\pi}{2})$ et $\lambda = 2$ on obtient $f_3(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = 0$ mais $\lambda f(x, y, z) = 2$.

Question 6

L'application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, y + x, z)$

Question 6

L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, y + x, z)$ est linéaire.

Question 6

L'application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, y + x, z)$ est linéaire. En effet, ses trois composantes $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto y + x$ et $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto z$ sont des formes linéaires car combinaisons linéaires de formes coordonnées.

Question 6

L'application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, y + x, z)$ est linéaire. En effet, ses trois composantes $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto y + x$ et $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto z$ sont des formes linéaires car combinaisons linéaires de formes coordonnées.

Calculons son noyau.

Question 6

L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, y + x, z)$ est linéaire. En effet, ses trois composantes $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto y + x$ et $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto z$ sont des formes linéaires car combinaisons linéaires de formes coordonnées.

<u>Calculons son noyau.</u>

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \in \ker(f)$ si, et seulement si, $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$,

Question 6

L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, y + x, z)$ est linéaire. En effet, ses trois composantes $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto y + x$ et $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto z$ sont des formes linéaires car combinaisons linéaires de formes coordonnées.

Calculons son noyau.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \in \ker(f)$ si, et seulement si, $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $x = 0$, $y + x = 0$ et $z = 0$

Question 6

L'application $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, y + x, z)$ est linéaire. En effet, ses trois composantes $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto y + x$ et $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto z$ sont des formes linéaires car combinaisons linéaires de formes coordonnées.

Calculons son noyau.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \in \ker(f)$ si, et seulement si, $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $x = 0$, $y + x = 0$ et $z = 0$ donc si, et seulement si, $x = y = z = 0$.

Question 6

L'application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, y + x, z)$ est linéaire. En effet, ses trois composantes $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto y + x$ et $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto z$ sont des formes linéaires car combinaisons linéaires de formes coordonnées.

Calculons son noyau.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \in \ker(f)$ si, et seulement si, $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $x = 0$, $y + x = 0$ et $z = 0$ donc si, et seulement si, $x = y = z = 0$.
On a donc $\ker(f) = \{(0, 0, 0)\}$

Question 6

L'application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, y + x, z)$ est linéaire. En effet, ses trois composantes $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto y + x$ et $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto z$ sont des formes linéaires car combinaisons linéaires de formes coordonnées.

Calculons son noyau.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \in \ker(f)$ si, et seulement si, $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $x = 0$, $y + x = 0$ et $z = 0$ donc si, et seulement si, $x = y = z = 0$.
On a donc $\ker(f) = \{(0, 0, 0)\}$ et f est injective.

Question 6

L'application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, y + x, z)$ est linéaire. En effet, ses trois composantes $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto y + x$ et $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto z$ sont des formes linéaires car combinaisons linéaires de formes coordonnées.

Calculons son noyau.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \in \ker(f)$ si, et seulement si, $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $x = 0$, $y + x = 0$ et $z = 0$ donc si, et seulement si, $x = y = z = 0$. On a donc $\ker(f) = \{(0, 0, 0)\}$ et f est injective.

D'après le théorème du rang, elle est donc surjective aussi car son espace de départ est égal à son espace d'arrivée (f est un endomorphisme).

Question 6

L'application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, y + x, z)$ est linéaire. En effet, ses trois composantes $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto y + x$ et $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto z$ sont des formes linéaires car combinaisons linéaires de formes coordonnées.

Calculons son noyau.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \in \ker(f)$ si, et seulement si, $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $x = 0$, $y + x = 0$ et $z = 0$ donc si, et seulement si, $x = y = z = 0$. On a donc $\ker(f) = \{(0, 0, 0)\}$ et f est injective.

D'après le théorème du rang, elle est donc surjective aussi car son espace de départ est égal à son espace d'arrivée (f est un endomorphisme). On a donc $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^3$.

Énoncé (partie 2)

Les applications suivantes sont-elles linéaires? Lorsqu'elles le sont, déterminer leur noyau et image.

1. $\mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(7)$.
2. $\mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P - XP'$.
3. $\mathbb{R}_5[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto PP'$.
4. $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x(t) \mapsto (t^2 + 1)x(t)$.
5. $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x(t) \mapsto |x(t)|$.
6. $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $x(t) \mapsto \int_0^1 x(t)\, dt$.

Question 7

L'application $f: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(7)$

Question 7

L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(7)$ est linéaire.

Question 7

L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(7)$ est linéaire. En effet, soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(7) = \lambda P(7) + \mu Q(7) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.

Question 7

L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(7)$ est linéaire. En effet, soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(7) = \lambda P(7) + \mu Q(7) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.

Calculons son noyau.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$P \in \ker(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow P(7) = 0$$

Question 7

L'application $f: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(7)$ est linéaire. En effet, soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(7) = \lambda P(7) + \mu Q(7) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.

Calculons son noyau.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$P \in \ker(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow P(7) = 0$$

Autrement dit, $\ker(f) = \{P \in \mathbb{R}_2[X] | P(7) = 0\}$.

Question 7

L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(7)$ est linéaire. En effet, soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(7) = \lambda P(7) + \mu Q(7) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.

Calculons son noyau.
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$P \in \ker(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow P(7) = 0$$

Autrement dit, $\ker(f) = \{P \in \mathbb{R}_2[X] | P(7) = 0\}$. Un tel polynôme $P \in \ker(f)$ se factorise par $X - 7$ (division euclidienne $P = (X - 7)Q + P(7)$).

Question 7

L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(7)$ est linéaire. En effet, soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(7) = \lambda P(7) + \mu Q(7) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.

Calculons son noyau.
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$P \in \ker(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow P(7) = 0$$

Autrement dit, $\ker(f) = \{P \in \mathbb{R}_2[X] | P(7) = 0\}$. Un tel polynôme $P \in \ker(f)$ se factorise par $X - 7$ (division euclidienne $P = (X - 7)Q + P(7)$). Ainsi la famille $\{X - 7, (X - 7)X\}$ est bien dans le noyau,

Question 7

L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(7)$ est linéaire. En effet, soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(7) = \lambda P(7) + \mu Q(7) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.

<u>Calculons son noyau.</u>
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$P \in \ker(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow P(7) = 0$$

Autrement dit, $\ker(f) = \{P \in \mathbb{R}_2[X] | P(7) = 0\}$. Un tel polynôme $P \in \ker(f)$ se factorise par $X - 7$ (division euclidienne $P = (X-7)Q + P(7)$). Ainsi la famille $\{X - 7, (X-7)X\}$ est bien dans le noyau, libre en raisonnant sur le degré

Question 7

L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(7)$ est linéaire. En effet, soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(7) = \lambda P(7) + \mu Q(7) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.

Calculons son noyau.
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$P \in \ker(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow P(7) = 0$$

Autrement dit, $\ker(f) = \{P \in \mathbb{R}_2[X] | P(7) = 0\}$. Un tel polynôme $P \in \ker(f)$ se factorise par $X - 7$ (division euclidienne $P = (X - 7)Q + P(7)$). Ainsi la famille $\{X - 7, (X - 7)X\}$ est bien dans le noyau, libre en raisonnant sur le degré et génératrice de $\ker(f)$ (le quotient dans la division euclidienne est de degré 1).

Question 7

L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(7)$ est linéaire. En effet, soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(7) = \lambda P(7) + \mu Q(7) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.

<u>Calculons son noyau.</u>

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$P \in \ker(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow P(7) = 0$$

Autrement dit, $\ker(f) = \{P \in \mathbb{R}_2[X] | P(7) = 0\}$. Un tel polynôme $P \in \ker(f)$ se factorise par $X - 7$ (division euclidienne $P = (X - 7)Q + P(7)$). Ainsi la famille $\{X - 7, (X - 7)X\}$ est bien dans le noyau, libre en raisonnant sur le degré et génératrice de $\ker(f)$ (le quotient dans la division euclidienne est de degré 1). C'est donc une base.

Question 7

L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(7)$ est linéaire. En effet, soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(7) = \lambda P(7) + \mu Q(7) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.

Calculons son noyau.
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$P \in \ker(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow P(7) = 0$$

Autrement dit, $\ker(f) = \{P \in \mathbb{R}_2[X] | P(7) = 0\}$. Un tel polynôme $P \in \ker(f)$ se factorise par $X - 7$ (division euclidienne $P = (X-7)Q + P(7)$). Ainsi la famille $\{X - 7, (X-7)X\}$ est bien dans le noyau, libre en raisonnant sur le degré et génératrice de $\ker(f)$ (le quotient dans la division euclidienne est de degré 1). C'est donc une base.

Comme $\ker(f)$ n'est pas réduit au vecteur nul, f n'est pas injective.

Comme $\ker(f)$ n'est pas réduit au vecteur nul, f n'est pas injective.
On calcule la dimension de l'image de f avec le théorème du rang :

Comme $\ker(f)$ n'est pas réduit au vecteur nul, f n'est pas injective.
On calcule la dimension de l'image de f avec le théorème du rang :

$$\dim \operatorname{im}(f) = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim \ker(f) = 3 - 2 = 1.$$

On en déduit que $\operatorname{im}(f) = \mathbb{R}$

Comme $\ker(f)$ n'est pas réduit au vecteur nul, f n'est pas injective.
On calcule la dimension de l'image de f avec le théorème du rang :

$$\dim \operatorname{im}(f) = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim \ker(f) = 3 - 2 = 1.$$

On en déduit que $\operatorname{im}(f) = \mathbb{R}$ et que f est surjective.

Question 8

L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P - XP'$

Question 8

L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P - XP'$ est linéaire.

Question 8

L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P - XP'$ est linéaire. En effet soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors
$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P(X) + \mu Q(X)) - X(\lambda P(X) + \mu Q(X))'$

Question 8

L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P - XP'$ est linéaire. En effet soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P(X) + \mu Q(X)) - X(\lambda P(X) + \mu Q(X))' = \lambda P(X) + \mu Q(X) - X(\lambda P'(X) + \mu Q'(X))$

Question 8

L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P - XP'$ est linéaire. En effet soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors
$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P(X) + \mu Q(X)) - X(\lambda P(X) + \mu Q(X))' =$
$\lambda P(X) + \mu Q(X) - X(\lambda P'(X) + \mu Q'(X)) =$
$\lambda(P(X) - XP'(X)) + \mu(Q(X) - XQ'(X))$

Question 8

L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P - XP'$ est linéaire. En effet soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors
$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P(X) + \mu Q(X)) - X(\lambda P(X) + \mu Q(X))' =$
$\lambda P(X) + \mu Q(X) - X(\lambda P'(X) + \mu Q'(X)) =$
$\lambda(P(X) - XP'(X)) + \mu(Q(X) - XQ'(X)) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.

Question 8

L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P - XP'$ est linéaire. En effet soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors
$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P(X) + \mu Q(X)) - X(\lambda P(X) + \mu Q(X))' =$
$\lambda P(X) + \mu Q(X) - X(\lambda P'(X) + \mu Q'(X)) =$
$\lambda(P(X) - XP'(X)) + \mu(Q(X) - XQ'(X)) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.
Calculons son noyau.

Question 8

L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P - XP'$ est linéaire. En effet soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors
$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P(X) + \mu Q(X)) - X(\lambda P(X) + \mu Q(X))' =$
$\lambda P(X) + \mu Q(X) - X(\lambda P'(X) + \mu Q'(X)) =$
$\lambda(P(X) - XP'(X)) + \mu(Q(X) - XQ'(X)) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.
Calculons son noyau.
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P \in \ker(f)$ si, et seulement si, $f(P)$ est égal au polynôme nul.

Question 8

L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P - XP'$ est linéaire. En effet soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors
$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P(X) + \mu Q(X)) - X(\lambda P(X) + \mu Q(X))' =$
$\lambda P(X) + \mu Q(X) - X(\lambda P'(X) + \mu Q'(X)) =$
$\lambda(P(X) - XP'(X)) + \mu(Q(X) - XQ'(X)) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.
<u>Calculons son noyau.</u>
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P \in \ker(f)$ si, et seulement si, $f(P)$ est égal au polynôme nul. Écrivons $P(X) = a + bX + cX^2$, on a alors
$f(P) = a + bX + cX^2 - X(b + 2cX) = a - cX^2$.

Question 8

L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P - XP'$ est linéaire. En effet soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors
$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P(X) + \mu Q(X)) - X(\lambda P(X) + \mu Q(X))' =$
$\lambda P(X) + \mu Q(X) - X(\lambda P'(X) + \mu Q'(X)) =$
$\lambda(P(X) - XP'(X)) + \mu(Q(X) - XQ'(X)) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.
Calculons son noyau.
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P \in \ker(f)$ si, et seulement si, $f(P)$ est égal au polynôme nul. Écrivons $P(X) = a + bX + cX^2$, on a alors
$f(P) = a + bX + cX^2 - X(b + 2cX) = a - cX^2$. De là, $f(P)$ est égal au polynôme nul si, et seulement si, $a = 0$ et
$c = 0$,

Question 8

L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P - XP'$ est linéaire. En effet soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors
$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P(X) + \mu Q(X)) - X(\lambda P(X) + \mu Q(X))' =$
$\lambda P(X) + \mu Q(X) - X(\lambda P'(X) + \mu Q'(X)) =$
$\lambda(P(X) - XP'(X)) + \mu(Q(X) - XQ'(X)) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.

Calculons son noyau.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P \in \ker(f)$ si, et seulement si, $f(P)$ est égal au polynôme nul. Écrivons $P(X) = a + bX + cX^2$, on a alors $f(P) = a + bX + cX^2 - X(b + 2cX) = a - cX^2$. De là, $f(P)$ est égal au polynôme nul si, et seulement si, $a = 0$ et $c = 0$,c'est-à-dire si, et seulement si, $P(X) = bX$

Question 8

L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P - XP'$ est linéaire. En effet soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors
$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P(X) + \mu Q(X)) - X(\lambda P(X) + \mu Q(X))' =$
$\lambda P(X) + \mu Q(X) - X(\lambda P'(X) + \mu Q'(X)) =$
$\lambda(P(X) - XP'(X)) + \mu(Q(X) - XQ'(X)) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.

<u>Calculons son noyau.</u>

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P \in \ker(f)$ si, et seulement si, $f(P)$ est égal au polynôme nul. Écrivons $P(X) = a + bX + cX^2$, on a alors $f(P) = a + bX + cX^2 - X(b + 2cX) = a - cX^2$. De là, $f(P)$ est égal au polynôme nul si, et seulement si, $a = 0$ et $c = 0$,c'est-à-dire si, et seulement si, $P(X) = bX$ donc le noyau est la droite vectorielle engendrée par le polynôme X.

Question 8

L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P - XP'$ est linéaire. En effet soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P(X) + \mu Q(X)) - X(\lambda P(X) + \mu Q(X))' = \lambda P(X) + \mu Q(X) - X(\lambda P'(X) + \mu Q'(X)) = \lambda(P(X) - XP'(X)) + \mu(Q(X) - XQ'(X)) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.

<u>Calculons son noyau.</u>

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P \in \ker(f)$ si, et seulement si, $f(P)$ est égal au polynôme nul. Écrivons $P(X) = a + bX + cX^2$, on a alors $f(P) = a + bX + cX^2 - X(b + 2cX) = a - cX^2$. De là, $f(P)$ est égal au polynôme nul si, et seulement si, $a = 0$ et $c = 0$,c'est-à-dire si, et seulement si, $P(X) = bX$ donc le noyau est la droite vectorielle engendrée par le polynôme X. Une base de $\ker(f)$ est donc $\{X\}$.

On peut encore utiliser le théorème du rang ici car l'espace de départ est de dimension finie.

On peut encore utiliser le théorème du rang ici car l'espace de départ est de dimension finie. On obtient

$$\dim \operatorname{im}(f) = 3 - 1 = 2.$$

On peut encore utiliser le théorème du rang ici car l'espace de départ est de dimension finie. On obtient

$$\dim \operatorname{im}(f) = 3 - 1 = 2.$$

L'image de f est donc un plan vectoriel dont nous allons déterminer une base. Nous pouvons d'ores et déjà en déduire que f n'est pas surjective puisque l'espace d'arrivée n'est pas de dimension 2.

On peut encore utiliser le théorème du rang ici car l'espace de départ est de dimension finie. On obtient

$$\dim \operatorname{im}(f) = 3 - 1 = 2.$$

L'image de f est donc un plan vectoriel dont nous allons déterminer une base. Nous pouvons d'ores et déjà en déduire que f n'est pas surjective puisque l'espace d'arrivée n'est pas de dimension 2.
<u>Calculons l'image de f.</u>

On peut encore utiliser le théorème du rang ici car l'espace de départ est de dimension finie. On obtient

$$\dim \mathrm{im}(f) = 3 - 1 = 2.$$

L'image de f est donc un plan vectoriel dont nous allons déterminer une base. Nous pouvons d'ores et déjà en déduire que f n'est pas surjective puisque l'espace d'arrivée n'est pas de dimension 2.

Calculons l'image de f.

On a $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2))$

On peut encore utiliser le théorème du rang ici car l'espace de départ est de dimension finie. On obtient

$$\dim \mathrm{im}(f) = 3 - 1 = 2.$$

L'image de f est donc un plan vectoriel dont nous allons déterminer une base. Nous pouvons d'ores et déjà en déduire que f n'est pas surjective puisque l'espace d'arrivée n'est pas de dimension 2.
Calculons l'image de f.
On a $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) = \mathrm{Vect}(1, 0, -X^2)$.

On peut encore utiliser le théorème du rang ici car l'espace de départ est de dimension finie. On obtient

$$\dim \operatorname{im}(f) = 3 - 1 = 2.$$

L'image de f est donc un plan vectoriel dont nous allons déterminer une base. Nous pouvons d'ores et déjà en déduire que f n'est pas surjective puisque l'espace d'arrivée n'est pas de dimension 2.

<u>Calculons l'image de f.</u>

On a $\operatorname{im}(f) = \operatorname{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) = \operatorname{Vect}(1, 0, -X^2)$.Une base de $\operatorname{im}(f)$ est donc $\{1, X^2\}$.

Question 9

L'application $f : \mathbb{R}_5[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto PP'$

Question 9

L'application $f : \mathbb{R}_5[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto PP'$ n'est pas linéaire.

Question 9

L'application $f\colon \mathbb{R}_5[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto PP'$ n'est pas linéaire. En effet, si $P = X$ et $\lambda = 2$, on a $f(\lambda P) = 4X$ mais $\lambda f(P) = 2X$.

Question 10

L'application $f : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x(t) \mapsto (t^2 + 1)x(t)$

Question 10

L'application $f\colon \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $x(t) \mapsto (t^2+1)x(t)$ est linéaire.

Question 10

L'application $f : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x(t) \mapsto (t^2 + 1)x(t)$ est linéaire. En effet, soient $x, y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

Question 10

L'application $f : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x(t) \mapsto (t^2 + 1)x(t)$ est linéaire. En effet, soient $x, y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors pour $t \in \mathbb{R}$,

Question 10

L'application $f : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x(t) \mapsto (t^2 + 1)x(t)$ est linéaire. En effet, soient $x, y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors pour $t \in \mathbb{R}$, on a
$f(\lambda x(t) + \mu y(t)) = (t^2 + 1)(\lambda x(t) + \mu y(t))$

Question 10

L'application $f : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x(t) \mapsto (t^2 + 1)x(t)$ est linéaire. En effet, soient $x, y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors pour $t \in \mathbb{R}$, on a $f(\lambda x(t) + \mu y(t)) = (t^2 + 1)(\lambda x(t) + \mu y(t)) = \lambda(t^2 + 1)x(t) + \mu(t^2 + 1)y(t)$

Question 10

L'application $f\colon \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $x(t) \mapsto (t^2+1)x(t)$ est linéaire. En effet, soient $x, y \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors pour $t \in \mathbb{R}$, on a $f(\lambda x(t) + \mu y(t)) = (t^2+1)(\lambda x(t) + \mu y(t)) = \lambda(t^2+1)x(t) + \mu(t^2+1)y(t) = \lambda f(x(t)) + \mu f(y(t))$.

Question 10

L'application $f : \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $x(t) \mapsto (t^2+1)x(t)$ est linéaire. En effet, soient $x, y \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors pour $t \in \mathbb{R}$, on a
$f(\lambda x(t) + \mu y(t)) = (t^2+1)(\lambda x(t) + \mu y(t)) =$
$\lambda(t^2+1)x(t) + \mu(t^2+1)y(t) = \lambda f(x(t)) + \mu f(y(t))$.
Le noyau $\ker(f)$ est réduit à l'application nulle.

Question 10

L'application $f : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x(t) \mapsto (t^2 + 1)x(t)$ est linéaire. En effet, soient $x, y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors pour $t \in \mathbb{R}$, on a $f(\lambda x(t) + \mu y(t)) = (t^2 + 1)(\lambda x(t) + \mu y(t)) = \lambda(t^2 + 1)x(t) + \mu(t^2 + 1)y(t) = \lambda f(x(t)) + \mu f(y(t))$.
Le noyau $\ker(f)$ est réduit à l'application nulle.On en déduit que f est injective.

Question 10

L'application $f \colon \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $x(t) \mapsto (t^2+1)x(t)$ est linéaire. En effet, soient $x, y \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors pour $t \in \mathbb{R}$, on a
$f(\lambda x(t) + \mu y(t)) = (t^2+1)(\lambda x(t) + \mu y(t)) =$
$\lambda(t^2+1)x(t) + \mu(t^2+1)y(t) = \lambda f(x(t)) + \mu f(y(t))$.
Le noyau $\ker(f)$ est réduit à l'application nulle.On en déduit que f est injective.
On ne peut pas utiliser le théorème du rang ici car l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie.

Question 10

L'application $f\colon \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $x(t) \mapsto (t^2+1)x(t)$ est linéaire. En effet, soient $x, y \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors pour $t \in \mathbb{R}$, on a
$f(\lambda x(t) + \mu y(t)) = (t^2+1)(\lambda x(t) + \mu y(t)) =$
$\lambda(t^2+1)x(t) + \mu(t^2+1)y(t) = \lambda f(x(t)) + \mu f(y(t))$.
Le noyau $\ker(f)$ est réduit à l'application nulle.On en déduit que f est injective.
On ne peut pas utiliser le théorème du rang ici car l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie.

On ne peut pas non plus considérer l'image des vecteurs d'une base car nous ne disposons pas d'une base explicite de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$!

On ne peut pas non plus considérer l'image des vecteurs d'une base car nous ne disposons pas d'une base explicite de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$! On en revient donc à la définition de l'espace image.

On ne peut pas non plus considérer l'image des vecteurs d'une base car nous ne disposons pas d'une base explicite de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$! On en revient donc à la définition de l'espace image. Soit $y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction, on cherche s'il existe un antécédent de y par f, On ne peut pas non plus considérer l'image des vecteurs d'une base car nous ne disposons pas d'une base explicite de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$! On en revient donc à la définition de l'espace image. Soit $y \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction, on cherche s'il existe un antécédent de y par f,c'est-à-dire qu'on cherche une fonction $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $(t^2+1)x(t) = y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme t^2+1 ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, On ne peut pas non plus considérer l'image des vecteurs d'une base car nous ne disposons pas d'une base explicite de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$! On en revient donc à la définition de l'espace image. Soit $y \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction, on cherche s'il existe un antécédent de y par f,c'est-à-dire qu'on cherche une fonction $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $(t^2+1)x(t) = y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme t^2+1 ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, la fonction $x\colon t \mapsto \frac{y(t)}{t^2+1}$ est bien définie et on a $f(x) = y$

On ne peut pas non plus considérer l'image des vecteurs d'une base car nous ne disposons pas d'une base explicite de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$! On en revient donc à la définition de l'espace image. Soit $y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction, on cherche s'il existe un antécédent de y par f,c'est-à-dire qu'on cherche une fonction $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $(t^2 + 1)x(t) = y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $t^2 + 1$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \colon t \mapsto \frac{y(t)}{t^2+1}$ est bien définie et on a $f(x) = y$ Comme tout élément de l'espace d'arrivé $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ admet un antécédent, on a $\mathrm{im}(f) = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et l'application f est surjective.

On ne peut pas non plus considérer l'image des vecteurs d'une base car nous ne disposons pas d'une base explicite de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$! On en revient donc à la définition de l'espace image. Soit $y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction, on cherche s'il existe un antécédent de y par f,c'est-à-dire qu'on cherche une fonction $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $(t^2 + 1)x(t) = y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $t^2 + 1$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, la fonction $x : t \mapsto \frac{y(t)}{t^2+1}$ est bien définie et on a $f(x) = y$ Comme tout élément de l'espace d'arrivé $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ admet un antécédent, on a $\mathrm{im}(f) = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et l'application f est surjective.

En conclusion, f est linéaire, injective et surjective, c'est donc un isomorphisme.

Question 11

L'application $f : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ x(t) \mapsto |x(t)|$

Question 11

L'application $f : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x(t) \mapsto |x(t)|$ n'est pas linéaire.

Question 11

L'application $f : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x(t) \mapsto |x(t)|$ n'est pas linéaire. En effet, si x est la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t$ et $\lambda = -1$, on a pour $t \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x(t)) = |t|$ et $\lambda f(x(t)) = -|t|$, mais $|t| \neq -|t|$ dès que $t \neq 0$.

Question 12

L'application $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $x(t) \mapsto \int_0^1 x(t)\,dt$

Question 12

L'application $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $x(t) \mapsto \int_0^1 x(t)\, dt$ est linéaire

Question 12

L'application $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $x(t) \mapsto \int_0^1 x(t)\,dt$ est linéaire car pour deux fonctions $x, y \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ on a

Question 12

L'application $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $x(t) \mapsto \int_0^1 x(t)\,dt$ est linéaire car pour deux fonctions $x, y \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ on a

$$\int_0^1 \big(x(t) + y(t)\big)\,dt = \int_0^1 x(t)\,dt + \int_0^1 y(t)\,dt$$

Question 12

L'application $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $x(t) \mapsto \int_0^1 x(t)\,dt$ est linéaire car pour deux fonctions $x, y \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ on a

$$\int_0^1 \big(x(t) + y(t)\big)\,dt = \int_0^1 x(t)\,dt + \int_0^1 y(t)\,dt$$

et pour une fonction $x \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$,

Question 12

L'application $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $x(t) \mapsto \int_0^1 x(t)\,dt$ est linéaire car pour deux fonctions $x, y \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ on a

$$\int_0^1 \big(x(t) + y(t)\big)\,dt = \int_0^1 x(t)\,dt + \int_0^1 y(t)\,dt$$

et pour une fonction $x \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^1 (\lambda x(t))\,dt = \lambda \int_0^1 x(t)\,dt.$$

Question 12

L'application $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $x(t) \mapsto \int_0^1 x(t)\,dt$ est linéaire car pour deux fonctions $x, y \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ on a

$$\int_0^1 \big(x(t) + y(t)\big)\,dt = \int_0^1 x(t)\,dt + \int_0^1 y(t)\,dt$$

et pour une fonction $x \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^1 (\lambda x(t))\,dt = \lambda \int_0^1 x(t)\,dt.$$

Le noyau $\ker(f)$ contient, par exemple, toutes les fonctions $x \mapsto \lambda(x - 1/2), \forall \lambda \in \mathbb{R}$. On en déduit que f n'est pas injective.

Le noyau $\ker(f)$ contient, par exemple, toutes les fonctions $x \mapsto \lambda(x - 1/2), \forall \lambda \in \mathbb{R}$. On en déduit que f n'est pas injective.
En revanche l'application f est surjective, c'est-à-dire que $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$.

Le noyau $\ker(f)$ contient, par exemple, toutes les fonctions $x \mapsto \lambda(x - 1/2), \forall \lambda \in \mathbb{R}$. On en déduit que f n'est pas injective.

En revanche l'application f est surjective, c'est-à-dire que $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$. En effet, soit $a \in \mathbb{R}$, Le noyau $\ker(f)$ contient, par exemple, toutes les fonctions $x \mapsto \lambda(x - 1/2), \forall\lambda \in \mathbb{R}$. On en déduit que f n'est pas injective.

En revanche l'application f est surjective, c'est-à-dire que $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$. En effet, soit $a \in \mathbb{R}$, alors $x : t \mapsto 2at$ est un antécédent de a par f

Le noyau $\ker(f)$ contient, par exemple, toutes les fonctions $x \mapsto \lambda(x - 1/2), \forall \lambda \in \mathbb{R}$. On en déduit que f n'est pas injective.
En revanche l'application f est surjective, c'est-à-dire que $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$. En effet, soit $a \in \mathbb{R}$, alors $x : t \mapsto 2at$ est un antécédent de a par f puisque

$$\int_0^1 2at\, dt = [at^2]_0^1 = a.$$

Exercice 2

Énoncé

On note $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Existe-t-il un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant les conditions suivantes:

1) $g(e_1) = e_2 + e_3$, $g(e_2) = e_1$, $g(e_3) = e_2 - e_3$.

2) $g(e_1 + e_2) = e_3$, $g(e_2 + e_3) = e_1$, $g(e_3 - e_1) = e_2$.

3) $g(e_1 + e_2) = e_3$, $g(e_3) = e_2 - e_3$.

4) Dans 1), 2) et 3), si g existe, est-il unique? Si oui, calculer $g(x, y, z)$.

On rappelle qu'une application linéaire est déterminée par l'image des vecteurs d'une base.

On rappelle qu'une application linéaire est déterminée par l'image des vecteurs d'une base.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel V. Soient $v_1, \ldots, v_n \in W$. Alors il existe une unique application linéaire $V \to W$ telle que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, f(e_i) = v_i$$

Question 1

Il existe donc bien une application linéaire $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $g(e_1) = e_2 + e_3$, $g(e_2) = e_1$ et $g(e_3) = e_2 - e_3$

Question 1

Il existe donc bien une application linéaire $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $g(e_1) = e_2 + e_3$, $g(e_2) = e_1$ et $g(e_3) = e_2 - e_3$ car (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$

Question 2

Il n'existe aucune application linéaire $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $g(e_1 + e_2) = e_3$, $g(e_2 + e_3) = e_1$ et $g(e_3 - e_1) = e_2$.

Question 2

Il n'existe aucune application linéaire $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $g(e_1 + e_2) = e_3$, $g(e_2 + e_3) = e_1$ et $g(e_3 - e_1) = e_2$. En effet, si une telle application existait,

Question 2

Il n'existe aucune application linéaire $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $g(e_1 + e_2) = e_3$, $g(e_2 + e_3) = e_1$ et $g(e_3 - e_1) = e_2$. En effet, si une telle application existait, on aurait alors par linéarité : $g(e_1) + g(e_2) = e_3$ et $g(e_3) - g(e_1) = e_2$

Question 2

Il n'existe aucune application linéaire $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $g(e_1 + e_2) = e_3$, $g(e_2 + e_3) = e_1$ et $g(e_3 - e_1) = e_2$. En effet, si une telle application existait, on aurait alors par linéarité : $g(e_1) + g(e_2) = e_3$ et $g(e_3) - g(e_1) = e_2$ d'où

$$g(e_2) + g(e_3) = g(e_1) + g(e_2) + g(e_3) - g(e_1) = e_3 + e_2$$

Question 2

Il n'existe aucune application linéaire $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $g(e_1 + e_2) = e_3$, $g(e_2 + e_3) = e_1$ et $g(e_3 - e_1) = e_2$. En effet, si une telle application existait, on aurait alors par linéarité : $g(e_1) + g(e_2) = e_3$ et $g(e_3) - g(e_1) = e_2$ d'où

$$g(e_2) + g(e_3) = g(e_1) + g(e_2) + g(e_3) - g(e_1) = e_3 + e_2$$

ce qui contredirait $g(e_2) + g(e_3) = e_1$.

Question 3

L'image de e_3, $g(e_3) = e_2 - e_3$, est déjà déterminée.

Question 3

L'image de e_3, $g(e_3) = e_2 - e_3$, est déjà déterminée. Il reste à donner les images de e_1 et de e_2.

Question 3

L'image de e_3, $g(e_3) = e_2 - e_3$, est déjà déterminée. Il reste à donner les images de e_1 et de e_2. Pour respecter
$g(e_1 + e_2) = e_3$,

Question 3

L'image de e_3, $g(e_3) = e_2 - e_3$, est déjà déterminée. Il reste à donner les images de e_1 et de e_2. Pour respecter $g(e_1 + e_2) = e_3$, il faut et il suffit que $g(e_1) + g(e_2) = e_3$.

Question 3

L'image de e_3, $g(e_3) = e_2 - e_3$, est déjà déterminée. Il reste à donner les images de e_1 et de e_2. Pour respecter $g(e_1 + e_2) = e_3$, il faut et il suffit que $g(e_1) + g(e_2) = e_3$. Donc pour un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ quelconque, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ déterminé par $g(e_1) = u$, $g(e_2) = e_3 - u$ et $g(e_3) = e_2 - e_3$ répond à la question.

Question 4

Pour la question 1), comme on a donné l'image de tous les vecteurs d'une base, l'application ainsi déterminée est unique.

Question 4

Pour la question 1), comme on a donné l'image de tous les vecteurs d'une base, l'application ainsi déterminée est unique. Pour $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on peut écrire par linéarité de g :

Question 4

Pour la question 1), comme on a donné l'image de tous les vecteurs d'une base, l'application ainsi déterminée est unique. Pour $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on peut écrire par linéarité de g :

$$g(u) = g(x, y, z)$$

Question 4

Pour la question 1), comme on a donné l'image de tous les vecteurs d'une base, l'application ainsi déterminée est unique. Pour $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on peut écrire par linéarité de g :

$$g(u) = g(x, y, z) = g(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xg(e_1) + yg(e_2) + zg(e_3).$$

Donc,

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= x(e_2 + e_3) + ye_1 + z(e_2 - e_3) && (1) \\ &= ye_1 + (x + z)e_2 + (x - z)e_3 = (y, x + z, x - z). && (2) \end{aligned}$$

Pour la question 3), on a vu qu'il y a plusieurs réponses possibles pour g.

Question 4

Pour la question 1), comme on a donné l'image de tous les vecteurs d'une base, l'application ainsi déterminée est unique. Pour $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on peut écrire par linéarité de g :

$$g(u) = g(x, y, z) = g(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xg(e_1) + yg(e_2) + zg(e_3).$$

Donc,

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= x(e_2 + e_3) + ye_1 + z(e_2 - e_3) && (1) \\ &= ye_1 + (x + z)e_2 + (x - z)e_3 = (y, x + z, x - z). && (2) \end{aligned}$$

Pour la question 3), on a vu qu'il y a plusieurs réponses possibles pour g.