Énoncé

Soient $E = \mathbb{R}^4$, $F = \mathbb{R}^5$, $\{e_1, \ldots, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $\{e'_1, \ldots, e'_5\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. Construire, si cela est possible, une application linéaire $f : E \to F$ telle que

1. $\operatorname{im} f = \operatorname{Vect}(e'_2, e'_4)$;
2. $\operatorname{im} f = \{0\}$;
3. $\operatorname{im} f = F$;
4. $\ker f = \operatorname{Vect}(e_2 + e_3, e_4)$ et $\operatorname{im} f = \operatorname{Vect}(e'_2, e'_3)$.

Condition 1

L'application $f : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (0, x, 0, y, 0) \in \mathbb{R}^5$ convient.

Condition 2

L'application $f : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^5$ convient.

Condition 3

Il n'en existe pas

Condition 3

Il n'en existe pas car $\dim(\mathbb{R}^5) > \dim(\mathbb{R}^4)$

Condition 3

Il n'en existe pas car $\dim(\mathbb{R}^5) > \dim(\mathbb{R}^4)$ et la dimension de l'image d'une application linéaire est nécessairement plus petit que l'espace vectoriel de départ (théorème du rang).

Condition 4

L'application $f : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (0, x, y - z, 0, 0) \in \mathbb{R}^5$ convient.

Condition 4

L'application $f : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (0, x, y - z, 0, 0) \in \mathbb{R}^5$ convient. Voici une façon de la construire :

Condition 4

L'application $f : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (0, x, y - z, 0, 0) \in \mathbb{R}^5$ convient. Voici une façon de la construire : on complète la base du noyau voulu $\ker(f) = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3, e_4)$ en une base de $\mathbb{R}^4$.

Condition 4

L'application $f : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (0, x, y - z, 0, 0) \in \mathbb{R}^5$ convient. Voici une façon de la construire : on complète la base du noyau voulu $\ker(f) = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3, e_4)$ en une base de $\mathbb{R}^4$. Ici, on peut prendre $\{e_2 + e_3, e_4, e_1, e_2)$.

Condition 4

L'application $f : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (0, x, y - z, 0, 0) \in \mathbb{R}^5$ convient. Voici une façon de la construire : on complète la base du noyau voulu $\ker(f) = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3, e_4)$ en une base de $\mathbb{R}^4$. Ici, on peut prendre $\{e_2 + e_3, e_4, e_1, e_2)$. Et comme une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de l'espace de départ

Condition 4

L'application $f : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (0, x, y - z, 0, 0) \in \mathbb{R}^5$ convient. Voici une façon de la construire : on complète la base du noyau voulu $\ker(f) = \text{Vect}(e_2 + e_3, e_4)$ en une base de $\mathbb{R}^4$. Ici, on peut prendre $\{e_2 + e_3, e_4, e_1, e_2)$. Et comme une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de l'espace de départ alors on pose $f(e_2 + e_3) = f(e_4) = 0$ et $f(e_1) = e'_2, f(e_2) = e'_3$.

Condition 4

L'application $f : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (0, x, y - z, 0, 0) \in \mathbb{R}^5$ convient. Voici une façon de la construire : on complète la base du noyau voulu $\ker(f) = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3, e_4)$ en une base de $\mathbb{R}^4$. Ici, on peut prendre $\{e_2 + e_3, e_4, e_1, e_2)$. Et comme une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de l'espace de départ alors on pose $f(e_2 + e_3) = f(e_4) = 0$ et $f(e_1) = e'_2, f(e_2) = e'_3$. Ce qui nous permet d'obtenir l'expression donnée (voir l'exercice 12 pour la construction générale)

Énoncé

Dans $\mathbb{R}^3$, soit D la droite vectorielle dirigée par $u = (1, 2, 3)$ et H le plan d'équation $3x + y - 2z = 0$.

- Vérifier que $\mathbb{R}^3 = H \oplus D$.
- Déterminer les expressions analytiques de p la projection sur H de direction D, et de s la symétrie par rapport à H de direction D.

Question 1

Comme $u \notin H$ alors

Question 1

Comme $u \notin H$ alors $H \cap D = 0$ et $H + D = \mathbb{R}^3$

Question 1

Comme $u \notin H$ alors $H \cap D = 0$ et $H + D = \mathbb{R}^3$ car

$$\begin{aligned}\dim(H + D) &= \dim(H) + \dim(D) - \dim(D \cap H)\\ &= 2 + 1 - 0 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)\end{aligned}$$

Question 2

Calculons les projections de $\mathbb{R}^3$ sur H de direction D.

Question 2

Calculons les projections de $\mathbb{R}^3$ sur H de direction D.
Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Question 2

Calculons les projections de $\mathbb{R}^3$ sur H de direction D.
Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Et soit D_x la droite parallèle à D passant par x.

Question 2

Calculons les projections de $\mathbb{R}^3$ sur H de direction D.
Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Et soit D_x la droite parallèle à D passant par x. La projection de x sur H de direction D correspond exactement à l'intersection de D_x et de H

Question 2

Calculons les projections de $\mathbb{R}^3$ sur H de direction D.
Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Et soit D_x la droite parallèle à D passant par x. La projection de x sur H de direction D correspond exactement à l'intersection de D_x et de H (qui est unique puisque $u \notin H$).

Question 2

Calculons les projections de $\mathbb{R}^3$ sur H de direction D.
Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Et soit D_x la droite parallèle à D passant par x. La projection de x sur H de direction D correspond exactement à l'intersection de D_x et de H (qui est unique puisque $u \notin H$). Soit λ l'unique réel tel que
$x - \lambda u \in D_x \cap H$.
Comme $x - \lambda u = (x_1 - \lambda, x_2 - 2\lambda, x_3 - 3\lambda) \in H$

Question 2

Calculons les projections de $\mathbb{R}^3$ sur H de direction D.
Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Et soit D_x la droite parallèle à D passant par x. La projection de x sur H de direction D correspond exactement à l'intersection de D_x et de H (qui est unique puisque $u \notin H$). Soit λ l'unique réel tel que $x - \lambda u \in D_x \cap H$.
Comme $x - \lambda u = (x_1 - \lambda, x_2 - 2\lambda, x_3 - 3\lambda) \in H$alors

$$0 = 3(x_1 - \lambda) + x_2 - 2\lambda - 2(x_3 - 3\lambda) = 3x_1 + x_2 - 2x_3 + \lambda$$

Question 2

Calculons les projections de $\mathbb{R}^3$ sur H de direction D.
Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Et soit D_x la droite parallèle à D passant par x. La projection de x sur H de direction D correspond exactement à l'intersection de D_x et de H (qui est unique puisque $u \notin H$). Soit λ l'unique réel tel que $x - \lambda u \in D_x \cap H$.
Comme $x - \lambda u = (x_1 - \lambda, x_2 - 2\lambda, x_3 - 3\lambda) \in H$alors

$$0 = 3(x_1 - \lambda) + x_2 - 2\lambda - 2(x_3 - 3\lambda) = 3x_1 + x_2 - 2x_3 + \lambda$$

Autrement dit, $\lambda = -3x_1 - x_2 + 2x_3$.

On en déduit que la projection p_H sur H est donnée par

On en déduit que la projection p_H sur H est donnée par

$$\begin{aligned} p_H(x) &= x - (-3x_1 - x_2 + 2x_3)u \\ &= (4x_1 + x_2 - 2x_3, 6x_1 + 3x_2 - 4x_3, 9x_1 + 3x_2 - 5x_3) \end{aligned}$$

On en déduit que la projection p_H sur H est donnée par

$$\begin{aligned} p_H(x) &= x - (-3x_1 - x_2 + 2x_3)u \\ &= (4x_1 + x_2 - 2x_3, 6x_1 + 3x_2 - 4x_3, 9x_1 + 3x_2 - 5x_3) \end{aligned}$$

et celle sur D est

On en déduit que la projection p_H sur H est donnée par

$$\begin{aligned} p_H(x) &= x - (-3x_1 - x_2 + 2x_3)u \\ &= (4x_1 + x_2 - 2x_3, 6x_1 + 3x_2 - 4x_3, 9x_1 + 3x_2 - 5x_3) \end{aligned}$$

et celle sur D est

$$\begin{aligned} p_D(x) &= (-3x_1 - x_2 + 2x_3)u \\ &= (-3x_1 - x_2 + 2x_3, -6x_1 - 2x_2 + 4x_3, -9x_1 - 3x_2 + 6x_3) \end{aligned}$$

On en déduit que la projection p_H sur H est donnée par

$$\begin{aligned} p_H(x) &= x - (-3x_1 - x_2 + 2x_3)u \\ &= (4x_1 + x_2 - 2x_3, 6x_1 + 3x_2 - 4x_3, 9x_1 + 3x_2 - 5x_3) \end{aligned}$$

et celle sur D est

$$\begin{aligned} p_D(x) &= (-3x_1 - x_2 + 2x_3)u \\ &= (-3x_1 - x_2 + 2x_3, -6x_1 - 2x_2 + 4x_3, -9x_1 - 3x_2 + 6x_3) \end{aligned}$$

La symétrie s par rapport à H de direction D est :

On en déduit que la projection p_H sur H est donnée par

$$\begin{aligned} p_H(x) &= x - (-3x_1 - x_2 + 2x_3)u \\ &= (4x_1 + x_2 - 2x_3, 6x_1 + 3x_2 - 4x_3, 9x_1 + 3x_2 - 5x_3) \end{aligned}$$

et celle sur D est

$$\begin{aligned} p_D(x) &= (-3x_1 - x_2 + 2x_3)u \\ &= (-3x_1 - x_2 + 2x_3, -6x_1 - 2x_2 + 4x_3, -9x_1 - 3x_2 + 6x_3) \end{aligned}$$

La symétrie s par rapport à H de direction D est :

$$\begin{aligned} s(x) &= p_H(x) - p_D(x) \\ &= (7x_1 + 2x_2 - 4x_3, 12x_1 + 5x_2 - 8x_3, 18x_1 + 6x_2 - 11x_3) \end{aligned}$$