

Devoir maison n° 2
A rendre la semaine du ? novembre 2023

Exercice 1 –

1. Soit z un nombre complexe non nul. Montrer que si z et $\frac{1}{z}$ ont le même module alors le module de z est 1.
2. En déduire l'ensemble des nombres complexes non nuls z tels que z , $\frac{1}{z}$ et $1 - z$ aient le même module.
Indication : On pourra utiliser la technique de l'argument moitié.

Exercice 2 – Trouver tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, (\sin(t) + i \cos(t))^n = \sin(nt) + i \cos(nt).$$

Indication : Attention, ce n'est pas la formule de Moivre !

Exercice 3 – Soit z un nombre complexe non nul. On cherche à trouver des conditions sur z pour que $z + \frac{1}{z}$ soit réel ou imaginaire pur.

1. Vérifier que si z est réel (respectivement imaginaire pur) alors $z + \frac{1}{z}$ est réel (respectivement imaginaire pur).
2. Montrer que si z est de module 1 alors $z + \frac{1}{z}$ est réel.
3. Montrer que z est réel si, et seulement si, $z = \bar{z}$, et z est imaginaire pur si, et seulement si, $z = -\bar{z}$.
4. En déduire que $z + \frac{1}{z}$ est réel si, et seulement si, $|z| = 1$ ou z est réel, et $z + \frac{1}{z}$ est imaginaire pur si, et seulement si, z est imaginaire pur.