

Devoir maison n° 1
A rendre la semaine du 2 octobre 2023

Exercice 1 –

1. Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \cos^2(y) + \cos^2(x+y) = 1 - 2 \cos(x) \cos(y) \sin(x) \sin(y) + \cos^2(x)(1 + \cos^2(y) - \sin^2(y)).$$

2. En déduire que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \cos^2(y) + \cos^2(x+y) = 1 + 2 \cos(x) \cos(y) \cos(x+y).$$

3. Considérons un triangle ABC dans le plan. Déduire de la question précédente que le triangle ABC est rectangle si, et seulement si,

$$\cos^2(\widehat{ABC}) + \cos^2(\widehat{CAB}) + \cos^2(\widehat{BCA}) = 1.$$

Exercice 2 –

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi).$$

Indication : Si $(a, b) \neq (0, 0)$, factoriser à gauche par $\sqrt{a^2 + b^2}$ et remarquer que $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$.

2. Résoudre l'équation suivante dans \mathbb{R} :

$$\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Exercice 3 –

1. Résoudre dans \mathbb{R} :

$$|\cos(x)| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Résoudre dans \mathbb{R} :

$$|\cos(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Résoudre dans \mathbb{R} :

$$|\sin(x)| = \frac{1}{2}.$$

4. Résoudre dans \mathbb{R} :

$$|\sin(x)| \geq \frac{1}{2}.$$