Géométrie analytique

Exercices translations et rotations

Exercice 1 (translations)**.** Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$. La translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application $t_{\vec{u}} \colon x \in \mathbb{A}^2 \mapsto x + \vec{u} \in \mathbb{A}^2$

- Montrer que $t_{\vec{u}}$ est une bijection et donner son inverse.
- Montrer que l'image par $t_{\vec{u}}$ d'une droite est parallèle à celle-ci.

Exercice 2 (rotations)**.** Soit $\Omega \in \mathbb{E}^2$ et $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation de centre Ω et d'angle Ω est l'application $r_{\Omega,\theta} \colon x \in \mathbb{E}^2 \mapsto R_\theta(x - \Omega) + \Omega \in \mathbb{E}^2$

- Calculer $r_{\Omega,x}(x)$ pour
  - $\Omega = (0, 0)$, $\theta = 0, \pi/3, \pi/2, \pi$ et $x = (0, 0), (0, 2), (2, 4)$.
  - $\Omega = (2, 4)$, $\theta = 0, \pi/3, \pi/2, \pi$ et $x = (0, 0), (0, 2), (2, 4)$.
- Montrer que $r_{\Omega,\theta}$ est une bijection et donner son inverse.
- Montrer que $r_{\Omega,\theta}$ a un unique point fixe (i.e. il existe un unique $x \in \mathbb{E}^2$ tel que $f(x) = x$)
- Montrer que $r_{\Omega,\theta}$ laisse invariant tout cercle de centre Ω (i.e. $r_{\Omega,\theta}(C(\Omega, \alpha)) = C(\Omega, \alpha)$).
- Que peut-on dire de la composition de deux rotations $r_{\Omega_1,\theta_1} \circ r_{\Omega_2,\theta_2}$ (*Indication : Chercher les (éventuels) points fixes de la composition et considérer l'application* $r_{\Omega_1,\theta_1} \circ r_{\Omega_2,\theta_2} - v$ *où* v *est un point fixe de* $r_{\Omega_1,\theta_1} \circ r_{\Omega_2,\theta_2}$. *Que se passe s'il n'y a pas de point fixe ?*) ?