Exercices 5 et 6

Soit $M = (m_{ij})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Soit $(E_{ij})_{i,j}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Les coefficients de la matrice E_{ij} sont 0 partout sauf en la coordonnée (i, j).
Le produit matriciel est l'unique application bilinéaire[1] $\cdot : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}, E_{ij} \cdot E_{kl} = \delta_{jk} E_{il} := \begin{cases} E_{il} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque ensuite que la matrice M s'écrit dans cette base de la façon suivante

$$M = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{j,i+1} E_{ij}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
M^2 &= \left(\sum_{i,j=1}^{n} \delta_{j,i+1} E_{ij} \right)^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{j,i+1} E_{ij} \sum_{k,l=1}^{n} \delta_{l,k+1} E_{kl} \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \delta_{j,i+1} \delta_{l,k+1} E_{ij} E_{kl} \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \delta_{j,i+1} \delta_{l,k+1} \delta_{j,k} E_{il} \\
&= \sum_{i,l} \left(\sum_{j,k} \delta_{j,i+1} \delta_{l,k+1} \delta_{j,k} \right) E_{il}
\end{aligned}$$

[1] C'est la même définition que forme bilinéaire sauf que l'espace but est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel quelconque et non juste $\mathbb{C}$. C'est la même différence qu'il y a entre application linéaire et forme linéaire.

Pour i et l fixés, le seul couple (j,k) pour lequel $\delta_{j,i+1}\delta_{l,k+1}$ est non nul est $(i+1,l-1)$. On en déduit donc que

$$M^2 = \sum_{i,l} \delta_{i+1,l-1} E_{il} = \sum_{i,l} \delta_{i+2,l} E_{il}$$

En itérant ce processus, on obtient que, pour tout $k < n$,

$$M^k = \sum_{i,l} \delta_{i+k,l} E_{il}$$

i.e. les coefficients de la matrice $M^k = (m_{ij}^{(k)})$ vérifient

$$\forall i,j \in \{1,\dots,n\}, m_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i+k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Ainsi, on en déduit que le polynôme minimal de M est X^n.
Plus généralement, le polynôme minimal de M^k est

$$\begin{cases} X^{\frac{n}{k}} & \text{si } k \text{ divise } n \\ X^{q+1} & \text{où } q \text{ est le quotient de la division euclidienne de } n \text{ par } k \text{ sinon} \end{cases}$$

Réciproquement, si on prend $q \in \{1,\dots,n\}$, on peut construire une matrice de polynôme minimal X^q et de polynôme caractérisque X^n à partir de M

- Si q divise n alors $M^{\frac{n}{q}}$ convient.
- Dans le cas général, la matrice définie par blocs par

$$\begin{pmatrix} M_q & 0 \\ 0 & 0_{\mathcal{M}_{n-q}(\mathbb{C})} \end{pmatrix},$$

  où M_q est la matrice de taille $q \times q$ définie de la même façon *mutatis mutandis* que M, convient.

Dans la suite, on notera $M_{q,n}$ les matrices obtenues dans le deuxième point de polynôme caractéristique X^n et de polynôme minimal X^q.

Soient P et Q deux polynômes unitaires à coefficients complexes tels que $Q \mid P$. Pour que P et Q soient respectivement le polynôme caractéristique et minimal d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il faut qu'ils aient les mêmes racines (qui seront alors les valeurs propres de la matrice M). Montrons que c'est l'unique obstruction à l'existence de cette matrice.

On écrit P et Q comme un produit de facteurs irréductibles :

$$P = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{n_i}$$

et

$$Q = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{q_i}$$

Considérons la matrice construite par blocs suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} + M_{q_1,n_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} + M_{q_2,n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_p I_{n_p} + M_{q_p,n_p} \end{pmatrix}$$

Montrons que le polynôme minimal de A est Q :

Méthode 1 :

Soient $R = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{r_i}$ et, pour $1 \leq j \leq p$, $R_j = \prod_{i=1}^{p}(X+\lambda_j-\lambda_i)^{r_i}$. Alors, grâce au calcul par blocs, on obtient

$$R(A) = \begin{pmatrix} R_1(M_{q_1,n_1}) & & & \\ & R_2(M_{q_2,n_2}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_p(M_{q_p,n_p}) \end{pmatrix}$$

Comme le polynôme minimal de M_{q_i,n_i} est X^{q_i} alors $R(A) = 0$ si, et seulement si, pour tout i, $r_i \geq q_i$ i.e. si, et seulement si, Q divise R. On en déduit donc que Q est bien le polynôme minimal de A.

Méthode 2 (théorème 6.6 du polycopié)

Montrons que l'ordre de l'endomorphisme $A - \lambda_i I_n$ est q_i pour tout $1 \leq i \leq p$. Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$. Comme les blocs indexés par un entier différent de i sont inversibles alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \operatorname{rang}((A-\lambda_i I_n)^p) \geq n - n_i$$

De plus, par la discussion du début de cette correction, on a

$$\forall p \in \{1, \ldots, q_i\}, \operatorname{rang}((A-\lambda_i I_n)^p) = n - n_i + q_i - p$$

et en particulier $\operatorname{rang}((A-\lambda_i I_n)^{q_i}) = n - n_i$. On en déduit donc que

$$\operatorname{Im}((A-\lambda_i I_n)^{q_i}) = \operatorname{Im}((A-\lambda_i I_n)^{q_i+1})$$

Et par conséquent, l'ordre de l'endomorphisme $A - \lambda_i I_n$ est q_i.
On en déduit que le polynôme minimal de A est (par le théorème 6.6 du polycopié) :

$$\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{q_i}$$

i.e. est Q.