

Flocon de Koch

Exercice 1 –

Dans cet exercice, nous allons construire le flochon de Koch décrit par Helge von KOCH en 1904 et qui est un des premiers exemples de fractale.

Pour la construire, on part d'un triangle équilatéral (que l'on peut normaliser en demandant qu'un de ses côtés soit $[0, 1]$) et à chaque étape, on fait la transformation suivante à chaque côtés :



FIGURE 1 – Transformation

Plus précisément, on coupe le côté en trois morceaux, on rajoute deux côtés au morceau central pour en faire un triangle équilatéral et on retire le milieu.

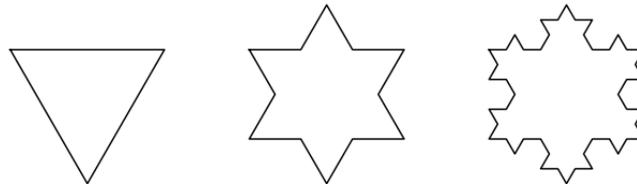


FIGURE 2 – Les trois premières étapes de la construction

Le flochon de von Koch est la figure obtenue en faisant tendre le nombre d'étapes vers l'infini.

On travaillera sur le plan complexe \mathbb{C} i.e. tous les points du plan seront donnés par des nombres complexes.

1) Étant donné deux nombres complexes a et b , calculer les trois nouveaux points obtenus par la transformation (1). Écrire la fonction prenant comme paramètre les deux complexes a, b et renvoyant les cinq points obtenus.

2) Écrire une fonction prenant comme paramètre une liste L de points et renvoyant la liste des points obtenus en appliquant la fonction précédente à chaque paire d'éléments successifs de la liste L .

Cette fonction permet donc de passer de la n ème à la $(n + 1)$ ème étape.

3) Calculer, par récurrence, le périmètre \mathcal{P}_n de la figure obtenue à la n ème étape et l'aire \mathcal{A}_n de l'ensemble bordé par cette figure. Calculer les limites $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_n$.

4) Écrire une fonction prenant un entier n et renvoyant la liste des points de la n ème étape.

5) Écrire une fonction prenant comme paramètre une liste de points et affichant la figure obtenue en reliant deux points successifs.