Géométrie analytique

Correction devoir maison

À rendre dans la semaine du 11 février.

Exercice 1. *Retrouver le triangle.*

On se place dans $\mathbb{R}^2$ munit du répère canonique.

Soient $\mathcal{O} = (3, 1)$, $A = (0, 5)$ et $H = (0, -1)$ trois points. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe un unique triangle ABC (non plat), qui admet H comme orthocentre et comme cercle circonscrit le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\mathcal{O}$ (et passant par A évidemment).

1. Soit a un réel et E le point de coordonnées $(0, a)$. Donner une équation cartésienne de (AH) et vérifier que E appartient à cette droite pour tout a.
2. On définit $\mathcal{D}_a$ la droite perpendiculaire à (AH) passant par E. En donner une équation paramétrique.
3. On admettra que le cercle de centre $\mathcal{O}$ et de rayon $(\mathcal{O}A)$ est donné par l'équation
$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$$
Remplacer la paramétrisation trouvée à la question précédente dans l'équation de $\mathcal{C}$ et trouver les valeurs de a pour lesquelles l'équation admet deux valeurs de t distinctes.
4. En déduire, lorsque cela a un sens, les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}_a$ en fonction de a. Nous les noterons B_a et C_a.
5. Montrer que les droites (AC_a) et (HB_a) sont perpendiculaires si et seulement si $a = -2$ ou $a = 5$.
6. Faire un dessin dans les deux situations. En déduire que si $a = 5$, le triangle est plat.
7. Soit I le point d'intersection de (AH) et de $\mathcal{C}$. Par la même méthode qu'à la question 3, trouver les coordonnées de I. Vérifier que E est le milieu de $[HI]$.

Solution :

1. On a $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $(AH)\ :\ 6x + c = 0$. Mais $A \in (AH)$, donc $c = 0$. Finalement, $(AH)\ :\ x = 0$. De plus, $x_E = 0$, donc $E \in (AH)$ pour tout réel a.
2. $\mathcal{D}_a$ est perpendiculaire à (AH) donc un vecteur directeur de $\mathcal{D}_a$ est $\Leftrightarrow \overrightarrow{v_a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On obtient donc une paramétrisation : $\begin{cases} x = t \\ y = a \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
3. En substituant, on obtient :
$$(t - 3)^2 + (a - 1)^2 = 25 \ \Leftrightarrow\ t^2 - 6t - 15 + a^2 - 2a = 0$$
Le but de la question est de construire la base $[BC]$ du triangle $[ABC]$. Puisque l'on cherche $[ABC]$ dont le cercle circonscrit est $\mathcal{C}$, B et C sont nécessairement sur le cercle et donc sont l'intersection de $\mathcal{D}_a$ et $\mathcal{C}$ pour un certain a.
Lorsque ce polynôme (en t) n'admet pas de solutions, il n'y a pas de points d'intersection (réel). Lorsque qu'il n'y a qu'une solution, cela signifie que $B = C$. Finalement, le seul cas qui nous intéresse, est le cas des solutions distinctes.
En utilisant les formules usuelles, on trouve que le discriminant de ce polynôme est $\Delta(a) = -4(a^2 - 2a - 24)$ et il sera positif pour $-4 < a < 6$ (pour le voir, trouver les racines du polynôme $\Delta(a)$, remarquer que son coefficient dominant est négatif et conclure).
Pour $a \in]-4, 6[$, on a
$$t = 3 - \sqrt{-a^2 + 2a + 24} \text{ ou } t = 3 + \sqrt{-a^2 + 2a + 24}$$

4. On remplace les deux solutions obtenues à la question précédente dans la paramétrisation de $\mathcal{D}_a$ et on obtient
$$B_a = (3 - \sqrt{-a^2 + 2a + 24}, a) \text{ et } C_a = (3 + \sqrt{-a^2 + 2a + 24}, a)$$

5. On a
$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AC_a}, \overrightarrow{HB_a} \rangle = 0 &\Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{-a^2 + 2a + 24} \\ a - 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 - \sqrt{-a^2 + 2a + 24} \\ a + 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-5)(a+3) + (a-5)(a+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 5 \text{ ou } a = -2 \end{aligned}$$

6. Le dessin pour $a = -2$ se trouve à sur la deuxième page.
Le cas $a = 5$ n'est pas à considère puisque $B_5 = (0, 5) = A$.

7. On sait que I est sur la droite (AH) donc $x_I = 0$. En remplaçant dans l'équation de $\mathcal{C}$, on trouve $9 + (y_I - 1)^2 = 25 \Leftrightarrow y_I = 1 \pm 4$. Comme on cherche $I \neq A$, on a $I = (0, -3)$.
On a bien $x_{E_{-2}} = 0 = \dfrac{0+0}{2} = \dfrac{x_H + x_I}{2}$ et $y_{E_{-2}} = -2 = \dfrac{-1-3}{2} = \dfrac{y_H + y_I}{2}$.