Géométrie dans l'espace

Feuille d'exercices

Exercice 1 – Calculer la caractéristique d'Euler de chacun des polyèdres suivants

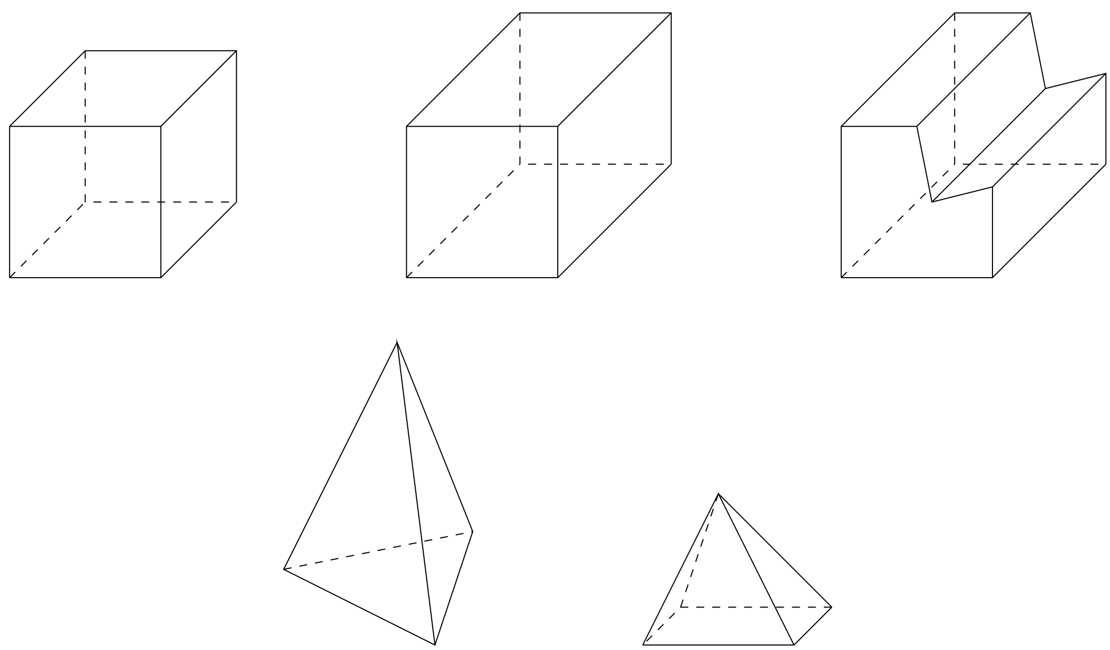

FIGURE 1 –

Exercice 2 – [CC 2023]

1. Calculer la caractéristique d'Euler de l'octaèdre (voir figure suivante) à partir de la définition.

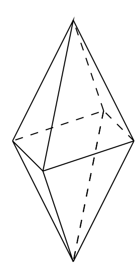

FIGURE 2 –

2. Pouvait-on trouver ce résultat sans faire le calcul ?

Exercice 3 –

1. On coupe une sphère par un plan. Quelle est la nature de la section obtenue ? (Justifier).
2. On coupe un cylindre droit de révolution. Peut-on obtenir comme plan de section un cercle ? un rectangle ? (Justifier).

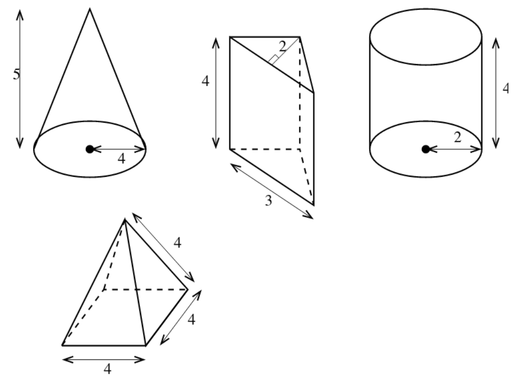

FIGURE 3 –

Exercice 4 – Calculer les volumes des solides de la figure 3 (les dimensions sont en cm).

Exercice 5 – Sur la figure suivante, les dimensions sont en cm.

1. Figure 1) : Calculer en fonction de x le volume total des deux cônes.
2. Figure 2) : déterminer le volume du cône tronqué

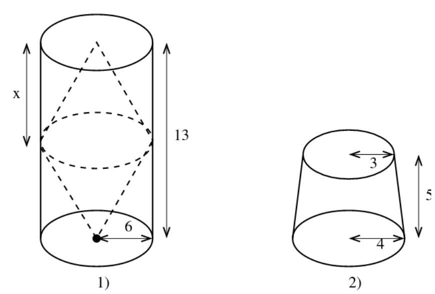

FIGURE 4 –

Exercice 6 – [CC 2023] On considère le cône droit $\mathscr{C}$ de base un cercle de diamètre $[AB]$ de longueur 16cm, de sommet S (qu'on supposera au-dessus de la base) tel que $BS = 10\text{cm}$.

1. Représenter ce cône.
2. Calculer son volume.
3. Soit $\mathscr{P}$ le plan parallèle au plan $\mathscr{P}'$ de la base de $\mathscr{C}$, à distance 4cm de ce dernier et intersectant $\mathscr{C}$. Calculer le volume du cône tronqué (c'est-à-dire la partie comprise entre les deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$) ainsi obtenu.

Exercice 7 – [CC 2023]

1. Construire les vues de face, de dessus et de droite du solide suivant

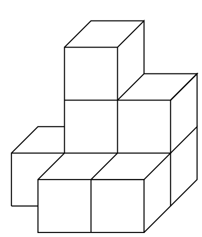

FIGURE 5 –

2. Construire en perspective cavalière un solide dont les vues de face, de dessus et de droite sont données dans la figure suivante :

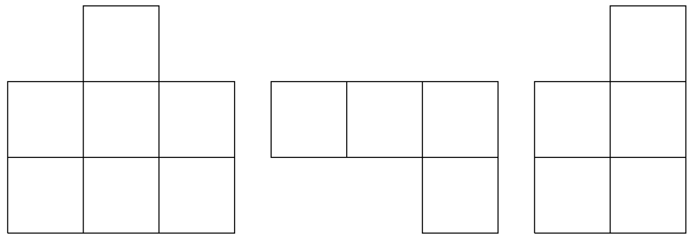

Figure 6 –

3. Peut-on obtenir plus d'un solide avec ces vues ?

Exercice 8 – Construire le patron d'un pavé de dimensions 1,5 cm, 2 cm et 3 cm.

Exercice 9 – Le patron suivant est celui d'un cube. Quelle est la lettre figurant sur la face de dessus du cube ?

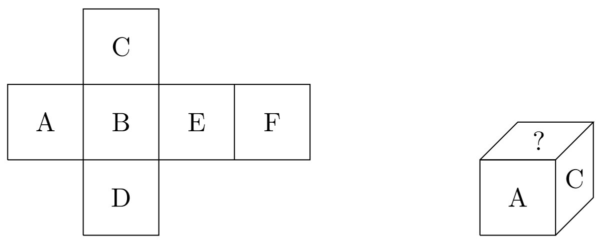

Figure 7 –

Exercice 10 – Les patrons suivants sont ceux de deux cubes. Une fois les cubes constitués, les lignes en pointillés vont-elles se fermer ?

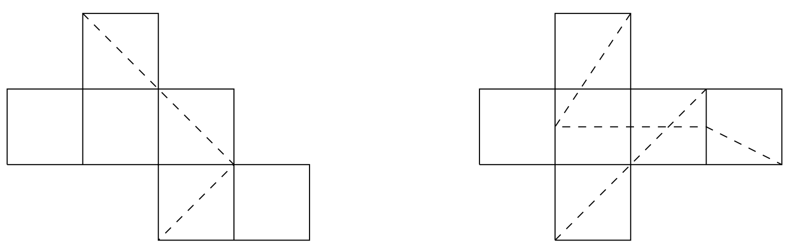

Figure 8 –

Exercice 11 – Parmi les dessins de la figure suivante, quels sont les patrons d'un pavé ?

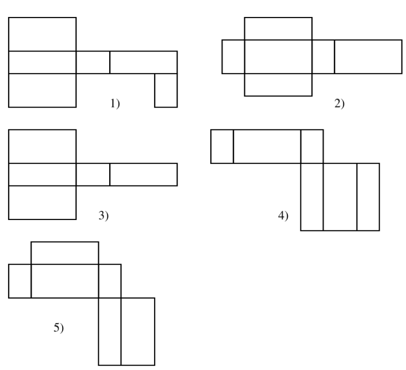

Figure 9 –

Exercice 12 – La figure fournie à la page suivante est le patron du "tétrahémihexaèdre", exemple de polyèdre non convexe.

1. Construire le tétrahémihexaèdre l'aide du patron fourni.
2. Calculer la caractéristique d'Euler de ce polyèdre. Attention : un plan fixé ne contient au plus qu'une seule face, un polygone dont les bords forment les arêtes (indication : les faces sont des carrés et des triangles équilatéraux).

Exercice 13 – On considère un tétraèdre ABCD, un point E sur l'arête $[\mathsf{AB}]$, un point F sur l'arête $[\mathsf{AC}]$.

1. Justifier que les droites (BC) et (EF) sont soit parallèles, soit se coupent en un point.
2. On suppose, comme sur la Fig. 1, que les droites (BC) et (EF) se coupent au point G. Trouver l'intersection des plans (BCD) et (EFD).

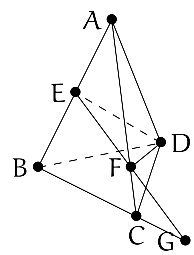

FIGURE 10 –

Exercice 14 – On considère un tétraèdre ABCD. On suppose que le point E est le milieu de $[\mathsf{AB}]$, le point F est le milieu de $[\mathsf{AC}]$, le point G est le milieu de $[\mathsf{AD}]$. Montrer que les plans (BCD) et (EFG) sont parallèles.

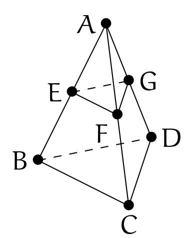

FIGURE 11 –

Exercice 15 – [CC 2023] Soit un tétraèdre ABCD. On appelle I le milieu de $[\mathsf{AB}]$ et J le milieu de $[\mathsf{AC}]$.
Soit H un point du segment $[\mathsf{AD}]$ distinct de son milieu. De plus,

- les droites (HI) et (DB) se coupent en M ;
- les droites (HJ) et (DC) se coupent en N.

1. Démontrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD).
2. Démontrer que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.

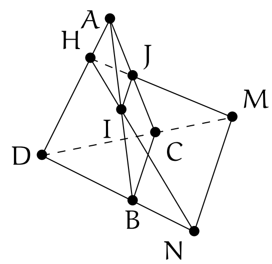

FIGURE 12 –

Exercice 16 – On considère le cube ci-dessous.

1. Justifier que $(FG) \parallel (AD)$ puis que les points A, D, F, G sont coplanaires.
2. Justifier que la droite (AD) est orthogonale au plan $(ABEF)$.
3. Montrer que (AF) est perpendiculaire à (AD).

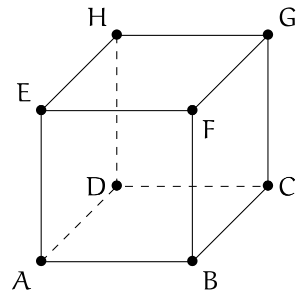

Figure 13 –

Exercice 17 – On considère le cube précédent. On veut montrer que (EC) est orthogonale au plan (HFA).

1. Montrer que la droite (HF) est orthogonale au plan (EGC). En déduire que (HF) est orthogonale à la droite (EC).
2. Montrer que la droite (HA) est orthogonale au plan (EDC). En déduire que (HA) est orthogonale à la droite (EC).
3. Montrer que (EC) est orthogonale au plan (HFA).

Exercice 18 – Soit $SABCD$ une pyramide avec une base à quatre côtés et de sommet S. On suppose que (AB) et (CD) ne sont pas parallèles. On notera I le milieu de [BS].

1. Montrer que les droites (AB) et (CD) s'intersectent en un point (que l'on notera M).
2. Trouver l'intersection de (SAB) et (SCD).
3. Trouver l'intersection de (AI) et (BCD) et en déduire que (AI) et (CD) ne s'intersectent pas.

Exercice 19 – [Adapté de CRPE Dijon] On considère un carré $ABCD$ de 8 cm de côté. Les points E et F sont les milieux respectifs des côtés $[CD]$ et $[AD]$. Les quatre triangles BAF , FED, ECB et BEF sont les quatre faces d'une pyramide à base triangulaire. Ce carré dans lequel sont ainsi mis en évidence ces quatre triangles constitue donc un patron pour la pyramide.

1. Tracer ce patron en grandeur réelle et former cette pyramide.
2. Montrer que la face EFD de la pyramide est orthogonale à l'arête $[BC]$.
3. Déduire le volume de la pyramide de la question précédente.
4. Démontrer que l'aire de la face BEF est de 24 cm^2.
5. On pose la pyramide sur la face BEF. Quelle est la mesure de la hauteur correspondant à cette position ?

Exercice 20 – [Extrait CRPE Grenoble]

On considère un cube de sommets A, B, C, D, E, F, G, H. On considère la pyramide de sommet A et de base $CDHG$.

1. Faire une représentation graphique.
2. Donner la nature géométrique la plus précise possible de chacune des faces de cette pyramide.
3. On suppose dorénavant que l'arête du cube mesure 4 cm. Calculer la longueur en cm, exacte et approchée à 0.1 près par défaut, des différentes arêtes de la pyramide.
4. Tracer en grandeur réelle un patron de cette pyramide

Exercice 21 – [Extrait CRPE Toulouse] On considère le cône de sommet S dont la base est le disque $\mathcal{D}$ de diamètre $[AB]$, $AB = 10\mathrm{cm}$. On appelle O le milieu de $[AB]$. On suppose que le sommet S est sur la perpendiculaire en O au plan du disque $\mathcal{D}$. On suppose de plus que $SA = AB$. Le but de l'exercice est de construire un patron de ce cône.

1. Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$ défini par le bord du disque $\mathscr{D}$. Justifier que (OS) est perpendiculaire à (AB) et à (OM).
2. Calculer OS.
3. Démontrer que SM est constant et vaut 10cm, pour tout point M du cercle $\mathscr{C}$.
4. (a) Montrer que le patron de la face non plane (face latérale) de ce cône est l'intersection d'un disque $\mathbb{D}$ et d'un secteur angulaire $\mathbb{A}$ ayant pour sommet le centre du disque $\mathbb{D}$.

   (b) Calculer le rayon du disque $\mathbb{D}$ et l'angle du secteur angulaire $\mathbb{A}$.
5. Construire le patron du cône