VOL DU COLLIER DE LA REINE
&
THÉORÈME DU SANDWICH

A. BOIVIN – T. JAMIN

Laboratoire Angevin de REcherche en MAthématiques

Théorème de Borsuk-Ulam

Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Alors il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$ [1]

Idée :
On associe à chaque point de la sphère de dimension n une famille de n nombres de façon continue, c'est-à-dire de telle sorte que si on bouge *un peu* le point considéré sur la sphère, on change *un peu* la famille de nombres. Le théorème affirme alors qu'il existe deux points opposés de la sphère à qui on a associé les mêmes nombres.

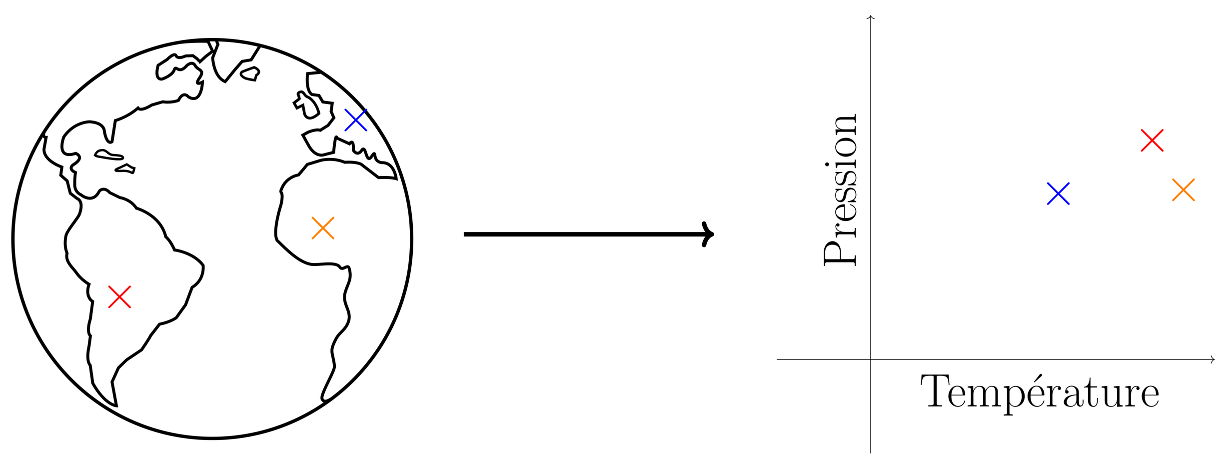
En dimension 1

Il existe en chaque instant deux endroits situés à l'équateur, diamétralement opposés, où la température est exactement la même. C'est aussi vrai en remplaçant "équateur" par n'importe quel méridien, longitude etc.

La fonction qui, à chaque point de l'équateur associe la température est évidemment continue (les températures en deux points très proches sur l'équateur sont aussi très proches). De plus, l'équateur est, grossièrement, donné par un cercle. On obtient ainsi une fonction continue du cercle $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}$. En appliquant le théorème de BORSUK-ULAM on obtient alors l'assertion.

Illustration en dimension 2

(Température, Pression) :



Théorème du sandwich au jambon

Si l'on se donne n parties mesurables dans $\mathbb{R}^n$, il existe toujours un hyperplan qui coupe simultanément chacune de ces n parties en deux parties de mesures égales.

Idée :
On peut toujours couper un sandwich (constitué de pain, jambon et fromage) en un seul coup de couteau de sorte que chaque partie contienne exactement la même proportion de chacun des ingrédients.

Preuve :
Soient $A_1, \dots, A_n$ des parties mesurables (pour une mesure μ) dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{S}^{n-1}$ la $n-1$-sphère dans $\mathbb{R}^n$. A chaque point $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$, on associe un hyperplan affine $\mathscr{H}_\mathbf{x}$ orthogonal au vecteur $\overrightarrow{O\mathbf{x}}$ (où O est l'origine) qui coupe A_n en deux parties égales (par TVI). Pour chaque partie mesurable A_i, on considère la fonction vol_i qui à un point $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^n$ associe la mesure de A_i dans le demi-espace défini par l'hyperplan $\mathscr{H}_\mathbf{x}$ (en considérant l'orientation induite par $\overrightarrow{O\mathbf{x}}$). En posant

$$f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}, \qquad \mathbf{x} \mapsto (\mathrm{vol}_1(\mathbf{x}), \mathrm{vol}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathrm{vol}_{n-1}(\mathbf{x}))$$

on se retrouve dans les hypothèses du théorème de BORSUK-ULAM et on obtient alors le résultat.

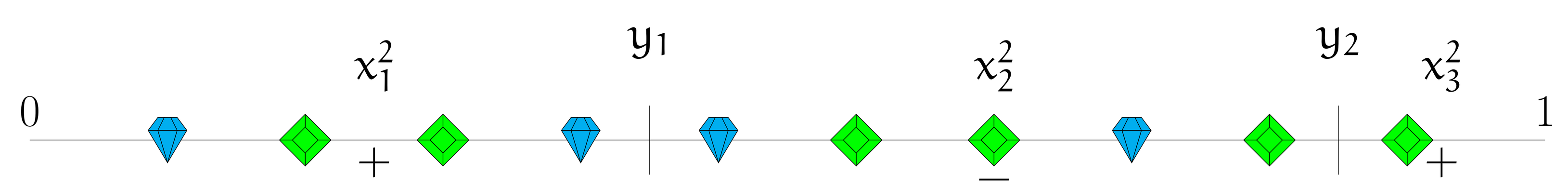
Collier de la reine

Deux voleurs ont récupéré un magnifique collier composé de n types de perles (diamants, émeraudes, rubis, etc.), chacun en nombre pair. Pour le départager équitablement en abîmant le moins possible le collier, les deux voleurs réfléchissent au nombre minimal de découpes à effectuer pour que chacun obtienne exactement le même nombre de chaque type de perle.

On peut toujours effectuer cette répartition avec (au plus) n découpes.

Remarque :
La preuve (par BORSUK-ULAM) n'est pas constructive (elle ne dit pas quels sont les points de découpe). Vous pouvez essayer de trouver vous-même les découpes.

On va modéliser le collier par le segment $[0, 1]$ des nombres entre 0 et 1 (inclus) avec les perles réparties équitablement dessus. Faire n découpes revient à choisir n nombres $x_1^2, \cdots, x_n^2$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Ensuite, pour chacun de ces segments, le choix d'un signe $\{+,-\}$ (correspondant aux deux voleurs) permet de déterminer la répartition des perles de ce segment.
En image pour $n = 2$, on obtient par exemple :



On va maintenant considérer la fonction

$$f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{signe}(x_i) \ \mathrm{Card}(\text{perles du type } j \text{ dans } [y_i, y_{i+1}[) \right)_{1 \le j \le n}$$

où y_i est le point de la $i$ème découpe, c'est-à-dire $y_i = x_1^2 + \dots + x_i^2$.
Si cette fonction s'annule, le nombre de perles de chaque type est équitablement réparti entre chaque voleur (grâce au choix des signes).
Cette fonction est continue et on peut appliquer le théorème de BORSUK-ULAM. Il existe donc $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$. En remarquant que $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$, on obtient $f(\mathbf{x}) = 0$, ce qui permet de conclure.

Bibliographie

[1] Jiří Matoušek. *Using the Borsuk-Ulam theorem*. Universitext. Lectures on topological methods in combinatorics and geometry, Written in cooperation with Anders Björner and Günter M. Ziegler. Springer-Verlag, Berlin, 2003, pp. xii+196. ISBN: 3-540-00362-2.