université angers

L3 PPPE
2024-2025

Séries

Feuille 1 : Suites

Exercice 1. Montrer qu'une suite géométrique (u_n) de raison q vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0$$

Exercice 2. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 3. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

si $q \neq 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0(n+1)$$

sinon.

Exercice 4. En utilisant les définitions du cours, montrer que

1. la suite de terme général $u_n = \frac{n+1}{n+2}$ converge vers 1,
2. la suite de terme général $u_n = \frac{3}{2^n}$ converge vers 0,
3. la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ converge vers 1,
4. la suite de terme général $u_n = \frac{n}{n^3+1}$ converge vers 0,
5. la suite de terme général $u_n = \frac{n^2+1}{n+1}$ tend vers $+\infty$,
6. la suite de terme général $u_n = -n + \frac{1}{n+1}$ tend vers $-\infty$.

Exercice 5.
1. Écrire avec des quantificateurs la négation de “il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que la suite (u_n) converge vers ℓ”.
2. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ ne converge pas.
3. La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n + 2^{-n}$ est-elle convergente ?

Exercice 6. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $\forall \varepsilon > 0, x \leq \varepsilon$ alors $x \leq 0$

2. En déduire que si $\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon$ alors $x = 0$

Exercice 7. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes :

$$u_n = 3 - \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = 3 + \frac{2}{n+3}.$$

Puis

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Exercice 8. Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

1. Montrer que ces suites convergent et ont la même limite, qu'on notera e.

2. Donner une valeur approchée de e à 10^{-6} près.

3. Montrer que e n'est pas un nombre rationnel.
Indication : Supposer par l'absurde que e est rationnel c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme d'une fraction p/q où $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, puis observer que $u_q < e < v_q$.

Exercice 9. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 > 0,\, v_0 > 0, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$

sont adjacentes (leur limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de u_0 et v_0).

Exercice 10. Calculer la limite d'une suite arithmétique.

Exercice 11. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $3u_{n+1} = u_n + 4$ pour tout $n \geq 0$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Montrer que $u_n \geq 2$ pour tout $n \geq 2$.

3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. En déduire que (u_n) est convergente.

5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - 2$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique et donner l'expression de v_n en fonction de n. En déduire la limite de (u_n)

6. Soient $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Déterminer l'expression de S_n et de T_n en fonction de n.

7. Déterminer la limite de (S_n) et celle de (T_n).

Exercice 12. Soit (u_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$ avec $u_0 = a$, $u_1 = b$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose $v_n = u_n - u_{n-1}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique convergente.

2. Calculer $w_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = 1 + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^4} + \cdots + \frac{2n+1}{2^{2n}}$.

1. En calculant de deux façons différentes $S_n - \frac{S_n}{4}$, donner une expression simplifiée de S_n.

2. En déduire la limite de la suite (S_n).

Exercice 14. Soit (F_n) la suite (dite de Fibonacci) définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \tag{*}$$

1. Calculer F_n pour $2 \leq n \leq 5$.

2. Déterminer les deux suites géométriques (a_n) et (b_n) de valeur initiale $a_0 = b_0 = 1$ vérifiant la relation de récurrence (*).

3. Déterminer l'unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} \alpha a_0 + \beta b_0 = F_0 \\ \alpha a_1 + \beta b_1 = F_1 \end{cases}$$

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \alpha a_n + \beta b_n.$$

Exercice 15. 1. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|), \quad \min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|).$$

Indication : Distinguer les cas $a < b$ et $a \geq b$.

2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$M_n = \max(u_n, v_n) \quad \text{et} \quad m_n = \min(u_n, v_n).$$

Montrer que les suites (M_n) et (m_n) convergent et préciser la limite de chacune d'elles en fonction de celle des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 16. Soient I un intervalle non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue tels que $f(I) \subset I$. Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in I, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

2. Montrons que si (u_n) converge vers $\ell \in I$ alors $f(\ell) = \ell$.

3. Redémontrer que si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \in]0, 1[$ alors u_n converge vers 0.

4. Soit $a > 0$. On considère la suite (u_n) où $u_0 > 0$ et où

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

On va montrer que (u_n) tend vers $\sqrt{a}$.

   (a) Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

(b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}.$$

(c) Montrer que si $n \geq 1$ alors $u_n \geq \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

(d) En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.

Exercice 17. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite et soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite des moyennes de Cesàro, c'est-à-dire la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}.$$

1. On veut démontrer que si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors (v_n) converge aussi vers ℓ.

   (a) À l'aide de la définition de la limite d'une suite, établir le résultat dans le cas où $\ell = 0$.

   (b) En considérant la suite $(u_n - \ell)$ établir le résultat pour ℓ quelconque dans $\mathbb{R}$.

2. En prenant la suite de terme général $(-1)^n$, montrer que la réciproque de cet énoncé est fausse en général.

Exercice 18. Trouver un équivalent le plus simple possible aux suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$
2. $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
3. $w_n = \dfrac{n^3 - \sqrt{1+n^2}}{\ln n - 2n^2}$
4. $z_n = \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

Exercice 19. Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme à coefficients réels, avec $a_p \neq 0$. Déterminer un équivalent simple de la suite $(P(n))$.

Exercice 20. Donner un équivalent des suites suivantes :

1. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
2. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$
3. $(1 + \sqrt{n})^{-\sqrt{n}}$
4. $\ln\left(\cos \frac{1}{n}\right) \ln\left(\sin \frac{1}{n}\right)$
5. $\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$

Exercice 21. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \sim n!$.

Exercice 22. Donner un équivalent de la suite de Fibonacci.