

## Séries

### Feuille 2 : Écriture décimale des réels

**Exercice 1.** 1. Montrer que  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

2. Montrer que  $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a + b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ .

3. Montrer que  $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Leftrightarrow a = c$  et  $b = d$ .

**Exercice 2.** 1. Montrer que la somme et le produit de deux nombres rationnels sont rationnels.

2. La somme de deux nombres irrationnels est-elle nécessairement irrationnelle ?

3. Le produit de deux nombres irrationnels est-il nécessairement irrationnel ?

4. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, x + y \notin \mathbb{Q}$ .

5. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, xy \notin \mathbb{Q}$ .

6. Montrer qu'il existe  $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$  et  $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  tel que  $a^b \in \mathbb{Q}$ .

**Exercice 3.** Les nombres suivants sont-ils irrationnels ?

1.  $\sqrt{p}$  où  $p$  est un nombre premier

4.  $\sqrt[3]{6}$

8.  $\sqrt[3]{7 + \sqrt{11}}$

2.  $\sqrt{pk}$  où  $p$  est premier et  $\text{pgcd}(p, k) = 1$ .

5.  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$

9.  $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$

3.  $\sqrt{9}$

6.  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

10.  $\frac{\ln(8)}{\ln(2)}$

7.  $\sqrt{7} + \sqrt{3}$

**Exercice 4.** Montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-\frac{n(n+1)}{2}} \notin \mathbb{Q}$ .

**Exercice 5.** 1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\sqrt{n}$  est rationnel si, et seulement si, il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $n = p^2$ .

*Indication : on pourra commencer par montrer que si  $n$  ne s'écrit pas comme le carré d'un entier alors il peut s'écrire comme le produit de nombres premiers distincts et d'un tel carré.*

2. Soient  $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  deux entiers avec  $q \neq 1$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $\frac{\ln(p)}{\ln(q)}$  soit rationnel.

*Indication : on pourra commencer par supposer que  $p$  ou  $q$  est premier.*

**Exercice 6.** Donner une expression fermée du nombre de chiffres d'un entier strictement positif à l'aide du logarithme décimal et de la partie entière.

**Exercice 7.** Écrire le développement décimal des fractions suivantes :

1.  $\frac{1}{7}$  ;

3.  $\frac{6}{11}$  ;

5.  $\frac{97}{135}$  ;

2.  $\frac{1710}{625}$  ;

4.  $\frac{3}{13}$  ;

6.  $\frac{1529327}{24975}$ .

**Exercice 8.** Écrire sous forme de fraction irréductible les nombres rationnels suivants :

1.  $0.\underline{3}$

2.  $0.245$

3.  $0.02\underline{5}$

4.  $0.\underline{123456789}$