Séries

Feuille 3 : Séries numériques I

Exercice 1. Soit (u_n) une suite telle qu'il existe une suite (v_n) et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq n_0, u_n = v_{n+1} - v_n$$

Montrer que pour $N \geq n_0$,

$$\sum_{n=n_0}^{N} u_n = v_{N+1} - v_{n_0}$$

Exercice 2. Pour chacune des séries suivantes, indiquer la nature et en cas de convergence calculer la somme :

$$\sum \frac{1}{7^n}, \quad \sum \frac{2^n}{5n+2}, \quad \sum \frac{4^n}{3n-1}, \quad \sum e^{-n-1}.$$

Exercice 3. Notons $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $\frac{1}{n^2}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $\frac{1}{n^3}$.

1. Montrer que pour $n \geq 2$,
$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$
2. En déduire que $\sum u_n$ converge.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $v_n \leq u_n$ et en déduire que $\sum v_n$ converge.
   Notons (R_n) la suite des restes de la série $\sum v_n$. On se fixe $n_0 \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que pour $n \geq n_0$,
$$\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n_0 n(n-1)}$$
5. En déduire une majoration de R_{n_0} par une expression "simple" en n_0 .
6. Application numérique : Trouver un n_0 pour que $R_{n_0} \leq 10^{-6}$.

Exercice 4. Établir la divergence des séries suivantes :

$$\sum n!, \quad \sum (-1)^n, \quad \sum_{n\geq 1} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n\geq 1} 1 - \frac{\sin n}{n}.$$

Indication : Pour la première série, on pourra montrer que pour $n \geq 2$, $n! \geq 2^{n-1}$.

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose $u_n = \frac{n-1}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Vérifier que
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, u_n = \frac{-1/2}{n} + \frac{2}{n+1} - \frac{3/2}{n+2}.$$
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{3}{2(n+2)}.$$

3. En déduire que la série $\sum u_n$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 6. Montrer que la série

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

est convergente, et calculer sa somme.

Exercice 7. Étudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum \frac{n}{n^3+1}$
2. $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
4. $\sum \frac{(-1)^n+n}{n^2+1}$
5. $\sum \frac{1}{n!}$
6. $\sum_{n\geq 1} \frac{3^n+n^4}{5^n-2^n}$

Exercice 8. Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{2n^3-n}{n^4+n+2}, \quad \sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \quad \sum \frac{1+\cos n}{2n^3+1}, \quad \sum \frac{1}{e^n+n}, \quad \sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Exercice 9. Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum e^{-n^2}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}, \quad \sum \frac{n^4}{3^n}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n^4+n-1}{3^n-1}, \quad \sum 3^{n(-1)^n}.$$

Exercice 10. Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{1-\sin n}{1+n\sqrt{n}}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{e^n-1}{\sqrt{n}}, \quad \sum e^{-\sqrt{2+n}}, \quad \sum_{n\geq 1} 1-\cos\frac{1}{n}.$$

Exercice 11. Étudier la nature des séries :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+\sin n^5}, \quad \sum \frac{e^{-2n}+\sqrt{n}}{n^2+1}, \quad \sum \left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n, \quad \sum n^{100} e^{-\sqrt{n+100}}.$$

Exercice 12. Étudier la nature des séries :

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n, \quad \sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n\geq 1} \ln(n) e^{-\sqrt{n}}$$

Exercice 13. Soit $(p_k)_{k\geq 1}$ la suite ordonnée des nombres premiers. Le but de l'exercice est d'étudier la divergence de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$. Pour $n \geq 1$, on pose $V_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$.

1. Démontrer qu'il y a une infinité de nombres premiers.
2. Montrer que la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ est convergente si et seulement si la suite $(\ln V_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
3. En déduire que la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ est convergente si et seulement si la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$ est convergente.
4. Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, V_n = \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^j}\right).$$
5. En déduire que $V_n \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$ pour $n \geq 1$.
6. Quelle est la nature de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$?