Séries

Feuille 4 : Séries numériques II

Exercice 1. Donner une primitive de chacune de ces fonctions (l'ensemble de départ de ces fonctions est un intervalle ouvert maximal où elles sont définies) :

$$f_1 : x \mapsto x^\alpha \text{ avec } \alpha \neq -1,\ f_2 : x \mapsto \frac{1}{x},\ f_3 : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}, f_4 = \cos, f_5 = \sin, f_6 = \ln, f_7 = \exp, f_8 = \tan$$

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}$, soient $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ existent et sont finies, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que

1. si pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.
2. si, pour tout $x \geq a$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ (croissance de l'intégrale)
3. $\int_a^\infty f(x) + \lambda g(x)\mathrm{d}x$ existe et $\int_a^\infty f(x) + \lambda g(x)\mathrm{d}x = \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x + \lambda \int_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$
4. si $c \geq a$ alors $\int_c^\infty f(x)\mathrm{d}x$ existe et $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x + \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$
5. si F est une primitive de f alors l'intégrale impropre $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ existe si, et seulement si, F a une limite finie en $+\infty$.

Exercice 3. Calculer, si elles sont bien définies, les intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ avec } \alpha \neq 1, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int_1^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int_1^{+\infty} \ln x\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4. Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ continue et décroissante. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ et $\Delta_n \coloneqq u_n - \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$

1. Montrer que (u_n) est convergente.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \Delta_n \leq u_n - u_{n+1}$.
3. En déduire que $\sum \Delta_n$ est convergente.
4. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^N u_n = \sum_{n=0}^N \Delta_n + \int_0^{N+1} f(t)\mathrm{d}t$
5. En déduire que la suite $\left(\sum_{n=0}^N u_n - \int_0^{N+1} f(t)\mathrm{d}t\right)$ converge.

Exercice 5. On souhaite étudier, suivant la valeur de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

1. Démontrer que la série converge si $\alpha > 1$.
2. Déterminer la nature de cette série dans le cas $\alpha < 1$.
3. On suppose que $\alpha = 1$.

(a) Montrer si $\beta \leq 0$, alors la série est divergente.

On pose $T_n = \displaystyle\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que si $\beta > 1$, alors la suite (T_n) est convergente et si $\beta \leq 1$, la suite (T_n) tend vers $+\infty$.

(c) Conclure pour $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$.

Exercice 6. On définit la fonction $f\colon x \in]0, +\infty[\mapsto \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, montrer que l'intégrale
$$I_n = \int_n^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$
est bien définie et exprimer I_n en fonction de n.

2. En déduire que $I_n \sim \frac{1}{n}$.

3. Montrer que la série $\sum f(n)$ est convergente.

4. (a) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$
   (b) En déduire un équivalent simple de
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}.$$

Exercice 7. Établir, grâce à une comparaison série-intégrale, les équivalences suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n\sqrt{n}$
2. $\ln(n!) \sim n\ln(n)$
3. $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \sim \ln(\ln(n))$

Exercice 8. Pour $\alpha > 1$, posons
$$\zeta(\alpha) \coloneqq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$
Déterminer la limite de $(\alpha - 1)\zeta(\alpha)$ quand α tend vers 1^+.

Exercice 9. On définit la fonction $f\colon x \in [2; +\infty[\longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que, pour tout réel $x \geq 2$:
$$\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

2. Pour tout entier $n \geq 2$, on définit l'intégrale :
$$I_n = \int_2^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$
   (a) Démontrer que : $\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

   (b) On définit la fonction
$$F\colon x \in [2; +\infty[\longmapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \in \mathbb{R}.$$
   Calculer la dérivée de F, et en déduire une expression de I_n en fonction de n.

   (c) Déterminer la limite de $I_n - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. On définit, pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}.$$

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, I_{n+1} \leq S_n \leq I_n + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

   (b) Trouver un équivalent simple de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 10. Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$
2. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}+n}$
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n}}{2n^2-5n}$

Exercice 11. 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos(n+1) - \cos(n) \geq -1$$

Indication : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin(\frac{x+y}{2})\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

2. Déterminer la nature de la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+\cos(n)}.$$

Exercice 12. 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(x+n\pi) = (-1)^n \sin(x)$

2. Déterminer la nature de

$$\sum_{n\geq 1} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right).$$

Indication : Justifier que si $u_n \to 0$ alors $\sin(u_n) - u_n = o(u_n^2)$ pour $n \to \infty$.

Exercice 13. Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que $u_n \sim v_n$.
2. Montrer que $\sum u_n$ diverge et que $\sum v_n$ converge.
3. Que peut-on en conclure ?

Exercice 14. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

1. Vérifier que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ n'est pas absolument convergente.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est décroissante sur $[3, +\infty[$.
3. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente (et est donc semi-convergente).

Exercice 15. Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente. Montrer que les séries $\sum \min(0, u_n)$ et $\sum \max(0, u_n)$ divergent.

Exercice 16. Soit (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ est semi-convergente.

2. Notons (u'_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u'_n = u_{4n+1} + u_{4n+3} + u_{2n}.$$

Montrer que $\sum u'_n$ est divergente.

3. Montrer que le produit de Cauchy de la série $\sum u_n$ avec elle-même diverge.

Exercice 17. Soit (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

1. Montrer que $\sum u_n$ est semi-convergente.
Par comparaison série-intégrale, on montre que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \ln(n)$ converge vers un réel γ c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o(1) \tag{*}$$

pour $n \to \infty$

2. En déduire que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \ln(2)$.
Indication : Montrer que pour $N \in \mathbb{N}$ pair

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{N/2} \frac{1}{n}$$

et trouver un résultat similaire pour N impair puis utiliser (*).
Soit σ la fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sigma(n) = \begin{cases} 2k \text{ si } n = 3k \\ 4k+1 \text{ si } n = 3k+1 \\ 4k+3 \text{ si } n = 3k+2 \end{cases}$$

3. Calculer $\sigma(n)$ pour $0 \leq n \leq 6$.

4. Montrer que la fonction σ est une bijection et déterminer la nature de la série $\sum u_{\sigma(n)}$ et si elle converge, en donner la somme.
Indication : On pourra grouper les termes avec $n = 3k$ et $n = 3k+1$.

5. Refaire les questions 3) et 4) avec l'application $\sigma_{a,b} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie, avec $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixés, par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sigma_{a,b}(n) := \begin{cases} 2ak + \ell & \text{si } n = (a+b)k + 2\ell \text{ avec } 0 \leq \ell \leq a-1 \\ 2bk + 1 + 2\ell & \text{si } n = (a+b)k + a + \ell \text{ avec } 0 \leq \ell \leq b-1 \end{cases}$$

C'est une généralisation des calculs précédents : $\sigma_{1,1} = id_{\mathbb{N}}$ et $\sigma_{1,2} = \sigma$.
Indication : On pourra montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \sum_{k=0}^{(a+b)n-1} u_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{an-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{bn} \frac{1}{2k}$$