Licence 3 Mathématiques, Mathématiques et Applications, Double Licence

Titre du Projet : $\int e^{t^2} dt$ n'est pas une fonction élémentaire

Tuteur enseignant : Boivin Antoine, Vacelet Éric

E-mail Tuteur enseignant : antoine.boivin@univ-angers.fr , eric.vacelet@univ-angers.fr

Nombre d'ECTS du sujet : 6 ECTS

Descriptif du sujet :

De manière informelle, une fonction élémentaire est une fonction définie sur un ouvert de $\mathbf{R}$ ou de $\mathbf{C}$ qui s'exprime comme composition de fonctions exponentielles, de fonctions logarithmiques, d'opérations rationnelles (somme, produit, quotient) et d'opérations algébriques (telles que les racines n-ièmes). Par exemple, les fonctions

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \ , \ \frac{z^{1995}\sqrt{\sin \frac{z^2}{z+1}}}{e^{\sqrt{\log z}}} \ , \ \arctan(z) = \frac{\log(1+iz) - \log(1-iz)}{2i}$$

sont élémentaires. Il est plausible, d'après cette vague définition, que la dérivée d'une fonction élémentaire soit encore élémentaire. Inversement, il est bien connu qu'une fraction rationnelle à coefficients réels ou complexes admet comme primitive une fonction élémentaire. Par contre, il existe des fonctions élémentaires très simples n'ayant pas de primitive qui soit élémentaire : c'est le cas par exemple de la fonction $z \mapsto e^{z^2}$.

Le projet consistera, d'une part à formaliser le concept de fonction élémentaire et d'autre part à démontrer un critère dû en partie à Liouville (1835), amélioré par Ostrowski (1946) permettant de tester si *certaines* fonctions admettent une primitive dite élémentaire. Le cadre de cette étude est **purement algébrique**, la notion de primitive étant considérée comme "inverse" de la dérivée : on dispose d'un corps de base $\mathbf{K}$ (penser au corps des fractions rationnelles sur $\mathbf{C}$), d'un surcorps $\mathbf{E}$ de $\mathbf{K}$ et d'un opérateur de dérivation $\mathrm{D} : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ satisfaisant aux propriétés "habituelles". Il est alors possible de définir de manière rigoureuse ce que veut dire "$f \in \mathbf{E}$ est élémentaire sur $\mathbf{K}$" et de donner dans certains cas un critère permettant d'affirmer que $f \in \mathbf{E}$ admet une primitive $g \in \mathbf{E}$, i.e. $\mathrm{D}(g) = f$, élémentaire sur $\mathbf{K}$.

Bibliographie éventuelle :

Remarques éventuelles :