L2 M-MA
2024-2025

Programmation sous Python

Feuille 2 : Utilisation de `matplotlib`

Exercice 1 (matplotlib)**.** Insérer dans le fichier la commande `import matplotlib.pyplot as plt` qui permet l'utilisation des éléments de la bibliothèque `matplotlib.pyplot`. L'outil principal pour le tracé de courbes est la méthode `plot`.

1. Tracer le graphe de $x \mapsto \cos(x)$ sur $[0, 2\pi]$. Pour cela, on construira un vecteur X contenant les coordonnées des abscisses de points entre 0 et 2π (utiliser `linspace`), on construira le vecteur Y des ordonnées en appliquant la fonction `np.cos` à X, et on effectuera le dessin avec `plt.plot`.
2. Écrire une fonction `plotSommeSin2` qui prend en argument un nombre réel A et qui trace (dans le même système de coordonnées) les graphes des fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et de $x \mapsto \sin(x) + \sin(2x)$ sur l'intervalle $[-A, A]$.
3. Écrire une fonction `plotSommeSin` qui prend en entrée un entier N et un nombre réel A et qui trace le graphe de $x \mapsto \sum_{j=1}^{N} \sin(jx)$ sur l'intervalle $[-A, A]$.
4. Regarder la documentation (sur internet) des méthodes `matplotlib.pyplot.xlabel`, `--.ylabel`, `--.title` et `--.legend` et s'en servir pour détailler les graphiques précédents.

Exercice 2 (lemniscate)**.** Le lemniscate de Bernoulli est la courbe paramétrée donnée en coordonnées cartésiennes [1] par

$$\big(x(t), y(t)\big) = \frac{a\sqrt{2}\,\cos t}{\sin^2 t + 1}\,(1, \sin t),$$

où $a > 0$ et $t \in [0, 2\pi]$.

1. Écrire une fonction `plotLemniscate` qui prend en argument une constante a et trace le lemniscate basée sur une subdivision de $[0, 2\pi]$ en 1000 sous-intervalles équidistants. On créera les listes des abscisses et ordonnées en utilisant une boucle.
2. Modifier la fonction en `plotLemniscate2` qui fait la même chose, mais en utilisant les fonctions `np.cos` et `np.sin` appliquées à un vecteur avec `linspace` — on appelle cela, des *opérations vectorisées*. Comparer les temps d'exécution des deux fonctions.

Exercice 3 (Suites de fonctions)**.** 1. On sait que la suite de fonctions définie par $f_n : x \in [0, 1] \mapsto 1 - x^n$ pour $n \geq 0$ converge simplement sur $[0, 1]$. Identifier cette limite et proposer une illustration en Python.

2. Faire de même avec la suite de fonctions définie par $g_n : x \in [0, \pi] \mapsto \sin^n(x)$ pour $n \geq 0$ sur $[0, \pi]$.
3. On sait que la suite de fonctions définie par $h_n : x \in [0, 1] \mapsto n^2\, x\, \mathrm{e}^{-nx}$ pour $n \geq 0$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$ mais qu'elle converge uniformément sur $[b, 1]$ uniquement, quel que soit $b \in \,]0, 1[$. Illustrer ce phénomène. Quels sont les différecnes si on considère la suite définie par $(x \mapsto n\, x\, \mathrm{e}^{-nx})$?

---

1. qui est défini comme suit : on se donne un point O et deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (et $\vec{k}$ si on est dans $\mathbb{R}^3$) linéairement indépendants. Un point M a pour coordonnée (x, y) (resp. (x, y, z)) si $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (resp. $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$).

Possibilité pour l'« illustration » en Python Utiliser une boucle pour représenter, dans un même système de coordonnées, les graphes des fonctions $f_1, \ldots, f_n$, avec $n = 20$ ou 50 par exemple, sur le domaine de définition désiré, puis y représenter la fonction f_{300} ou f_{1000}...Pour que le résultat soit suggestif, on peut choisir la couleur de chaque graphe de la boucle en variant le coefficient α dans la definition RGBA ; exemple `color=(.1, .2, .5, j/n)`, où $1 \leq j \leq nj$.

Exercice 4. Nous allons apprendre comment importer et transformer une image dans `python`. Commencer par télécharger une image au format `.png` ou `.jpg` et la placer dans le même dossier du fichier `python` actuel. On suppose par la suite que le nom du fichier est `image.png`.

1. Regarder (sur Internet) la documentation des fonctions `matplotlib.pyplot.imread` et `--.imshow`.
2. Utiliser la commande `x = plt.imread("image.png")` pour importer l'image dans `python`. Quelle est la nature de `x` ?
3. On peut rendre une image plus « lisse » en interpolant de nouvelles valeures à partir des anciennes. Essayer par exercicemple `plt.imshow(x, interpolation='bilinear')`.
4. Retrouver la dimension de l'image à l'aide de la fonction `np.shape` ; la première valeur est le nombre de pixels selon la hauteur, la deuxième le nombre de pixels selon la largeur et la troisième le nombre de composantes pour coder une couleur [2]. Zoomer sur une partie de l'image en choisissant une partie de `x`.
5. Utiliser la fonction `numpy.flipud` pour inverser l'image.
6. Essayer des opérations vectorielles sur `x` et afficher les résultats sous forme d'images. Par exemple remplacer les composantes de chaque couleur par leurs moyenne, ou bien enlever la composante *rouge*...

Exercice 5 (Système de coordonnées)**.** Le but de cet exercice est d'étudier d'autres systèmes de coordonnées sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ que le classique système de coordonnées cartésiennes.

1. Montrer que la fonction $\Phi_{\mathrm{Pol}} : \mathbb{R}_{>0} \times [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ définie par :
$$\Phi_{\mathrm{Pol}}(r, \theta) := (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$
est une bijection et donner son inverse.
Faire attention au domaine de définition des fonctions utilisées.
On dit qu'un point a pour coordonnées polaires (r, θ) s'il a pour coordonnées cartésiennes $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.
2. Écrire une fonction `PoltoCart` qui convertit les coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes et une fonction `CarttoPol` qui fait l'inverse.
3. On appelle équation polaire d'une courbe une équation de la courbe exprimée en fonction des coordonnées polaires. Dans cette question, nous allons étudier les courbes décrites par une équation de la forme $r = f(\theta)$ i.e. les courbes dont les points s'écrivent sous la forme $(f(\theta), \theta)$. Écrire une fonction pour chacune des équations suivantes permettant de dessiner en fonction des paramètres.
   (a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et on prend $f \equiv a$.
   (b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et on prend $f : \theta \mapsto a + b\theta$.
   (c) Soient $a, k, \varphi_0 \in \mathbb{R}$ et on prend $f : \theta \mapsto a\cos(k\theta + \varphi_0)$.
   (d) Soient $e, p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et on prend $f : \theta \mapsto \frac{p}{1 - e\cos(\theta)}$.

   Pour comprendre ces courbes, on pourra faire les actions suivantes :
   (a) Montrer que l'on obtient un cercle et donner son équation en coordonnées cartésiennes.
   (b) On peut examiner le cas $a = 0$. Trouver alors à quoi correspond la valeur b. Puis voir ce que change la valeur a.
   (c) On pourra étudier ce qui se passe quand $k \in \mathbb{N}$ et notamment dénombrer le nombre de pétales en fonction de k. Peut-on obtenir n'importe quel nombre de pétales ? Que se passe-t-il si $k \in \mathbb{Q}$? Que remarque-t-on si $\varphi_0 = 0$? Démontrer-le.
   (d) Distinguer les cas $e = 0, e < 1, e = 1, e > 1$. Montrer que si $e = 1$, on obtient une parabole d'équation cartésienne $x = \frac{1}{2p}y^2 - \frac{p}{2}$.

2. Il y a trois composantes pour chaque couleur, trois entiers R, G et B compris entre 0 et $255 = 2^8 - 1$.

4. Montrer que la fonction $\Phi_{\mathrm{Cyl}} \colon \mathbb{R}_{>0} \times [-\pi, \pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ définie par :

$$\Phi_{\mathrm{Cyl}}(r, \theta, z) \coloneqq (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$$

   est une bijection et donner son inverse.
   On dit qu'un point a pour coordonnées cylindriques (r, θ, z) s'il a pour coordonnées cartésiennes $(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$.
5. Écrire une fonction `CyltoCart` qui convertit les coordonnées cylindriques en coordonnées cartésiennes et une fonction `CarttoCyl` qui fait l'inverse.
6. Montrer que la fonction $\Phi_{\mathrm{Sph}} \colon \mathbb{R}_{>0} \times [0, \pi] \times [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ définie par :

$$\Phi_{\mathrm{Sph}}(r, \theta, \varphi) \coloneqq (r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta))$$

   est une bijection et donner son inverse.
   On pourra utiliser les fonctions définies précédemment pour décrire l'inverse.
   On dit qu'un point a pour coordonnées sphériques (r, θ, φ) s'il a pour coordonnées cartésiennes

$$(r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta))$$

   (φ est appelé longitude et θ est appelé colatitude[3] ou angle zénithal).
7. Écrire une fonction `SphtoCart` qui convertit les coordonnées sphériques en coordonnées cartésiennes et une fonction `CarttoSph` qui fait l'inverse.
8. Décrire le lieu géométrique des points de coordonnées sphériques (r_0, θ, φ) avec r_0 fixé.
9. Écrire une fonction `distanceorthodromique` associant à deux points A et B de coordonnées sphériques respectives (r, θ_1, φ_1) et (r, θ_2, φ_2) (ils sont à la même distance de l'origine) leur distance orthodromique (ou autrement dit, la longueur du plus petit arc tracé sur la sphère les reliant) :

$$d_{orth}(A, B) = r \arccos\left(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right).$$

3. la latitude est l'angle complémentaire de la colatitude