Programmation sous Python

Feuille 3 : Utilisation de `python` pour l'étude des suites

Représentation graphique d'une suite numérique

Pour visualiser une suite (u_n), on peut utiliser le module `matplotlib.pyplot` de `python` pour afficher les termes u_n en fonction de l'indice n. On obtient une figure de la forme :

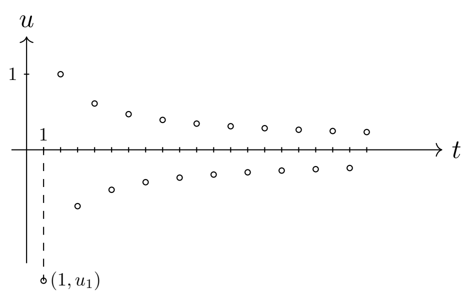

Figure 1: Les 20 premiers termes de la suite $u_n = \frac{(-1)^n\sqrt{2+n}}{n}$.

Exercice 1. On définit la suite (u_n) par : $u_n = \mathrm{PGCD}\left(n^2+4n+3, n^3+3n-5\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Définir une fonction `u` prenant en paramètre un nombre entier n et renvoyant le terme u_n.
2. Afficher les 30 premiers termes de la suite, comme dans la figure 1. Cette suite est-elle périodique ? Si oui, déterminer sa période.
3. Afficher les termes suivants. Cette suite est-elle périodique ? Si oui, déterminer sa période.
4. (plus difficile) Soient $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ deux polynômes à coefficients entiers tels que $P \wedge Q = 1$. Montrer que la suite $(u_n \coloneqq \mathrm{PGCD}(P(n), Q(n)))$ est une suite périodique.

Exercice 2. On définit la suite (u_n) par : $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Donner une représentation graphique des 50 premiers termes de la suite (u_n), comme dans la figure 1.
2. Calculer la limite ℓ (si elle existe) de la suite (u_n). Vérifier à l'aide de `python`, l'équivalent de la suite $(u_n-\ell)_n$ quand $n \to +\infty$.
3. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en $+\infty$ de la suite u_n.
4. Avec la même méthode que pour la question 2, retrouver le développement limité en $+\infty$ à l'ordre 2 de la suite u_n.

Suites définies par récurrence

Exercice 3. Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = \begin{cases} u_n + n + 2 & \text{si } \mathrm{PGCD}(u_n, n+1) = 1 \\ \frac{u_n}{\mathrm{PGCD}(u_n, n+1)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Tracer cette suite pour $n \leq 1000$. Décrire précisément le comportement à l'infini de cette suite.

Exercice 4 (Représentation en escalier)**.** Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $f(I) \subset I$, alors, étant donné $a \in I$, on peut considérer la suite définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On veut représenter la suite (u_n) à l'aide des fonctions $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, comme dans la figure 2

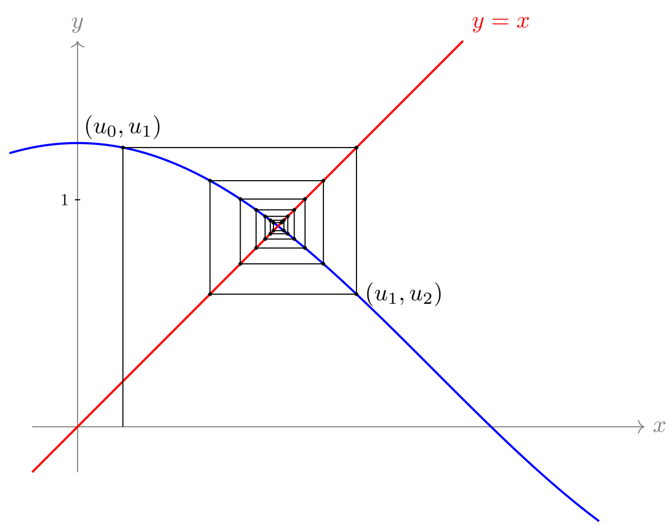

Figure 2: L'escalier des premiers 12 termes de la suite récurrente définie par$u_n = \cos(u_{n-1}) + \frac{1}{2}$.

1. Définir une fonction `rpz_escalier` prenant en paramètre deux réels $m < M$, une fonction $f : [m, M] \to [m, M]$, un réel $a \in [m, M]$ et un entier N et traçant sur le même graphique :
   - La fonction $id : x \mapsto x$ en rouge.
   - La fonction f en bleu.
   - Les $2N$ premiers points de l'escalier de la figure 2, correspondant aux N premiers termes de la suite (u_n).
2. Appliquer l'algorithme à la fonction $f : [1/2, 4] \to [1/2, 4], x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.
3. La suite définie par récurrence avec la fonction f converge-t-elle ? Si "oui", vers quelle valeur ?

Exercice 5 (La suite logistique)**.** Pour un paramètre $c \in \mathbb{R}$, on définit la fonction :

$$f_c : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto cx(1-x)$$

1. Tracer le graphe sur $[0, 1]$ de la fonction f_c pour différentes valeurs de c.
2. Pour quelles valeurs de c a-t-on $f_c([0, 1]) \subset [0, 1]$?

   Pour un des c vérifiant la condition ci-dessus, et pour un certain $a \in [0, 1]$, on considère la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f_c(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

3. Écrire une fonction `rpz_logistique` prenant en paramètre un réel c, un réel $a \in [0,1]$ et un entier N et qui donne une représentation graphique, comme dans la figure 1, des N premiers termes de la suite (u_n) définie par les valeurs a et c fournies en argument.

4. Décrire le comportement de la suite (u_n) lorsque l'on fait varier c.

5. Pour mieux visualiser ce qu'il se passe, on peut utiliser la fonction en escalier définie dans l'exercice 4 : définir une fonction `escalier_logistique` prenant en paramètres a et c et affichant la représentation en escalier de la suite (u_n) définie par a et c.

   (a) Pour $c < 1$, quel est le comportement de la suite ? Que peut-on dire sur le graphe de f_c pour ces valeurs de c ?

   (b) Pour $1 < c < 3$, quel est le comportement de la suite ? Que peut-on dire sur le graphe de f_c pour ces valeurs de c ?

   (c) Que se passe-t-il pour des valeurs de $c \geq 3$? Par exemple $c = 3.1$ et $a = 0.4$, puis $c = 3.5$.
   Indication : Définir la fonction $g_c : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f_c(f_c(x))$ *et l'utiliser pour étudier la convergence des suites* $(v_k) = (u_{2k})$ *et* $(w_k) = (u_{2k+1})$.

6. Définir une fonction `feigenbaum`[1] prenant en paramètre $0 \leq c_1 < c_2 \leq 4$ et $a \in [0,1]$ et affichant le nuage formé des points (c, u_n) pour $c \in [c_1, c_2]$ et $150 \leq n \leq 200$.

   Tester la fonction avec $c_1 = 0, c_2 = 3.55$ et $a = 0.4$, puis pour $c_1 = 3$ et $c_2 = 4$. Comment interpréter ces résultats ?

Exercice 6. On aimerait décrire l'évolution de deux espèces de poissons dans la Loire sous la forme d'un système de proies/prédateurs. Les proies sont les truites, les prédateurs sont les brochets. On désigne par $m_T(n)$ et $m_B(n)$ les masses (en kg) de truites et de brochets dans la zone considérée, à l'instant n. Entre les instants n et $n+1$, les populations évoluent de la manière suivante :

- Une masse $\alpha m_T(n)$ de nouvelles truites nait ($\alpha > 0$).
- Une masse $\beta m_T(n) m_B(n)$ de truites nourrit les brochets ($\beta > 0$) et sert à leur reproduction.
- Une masse γ de brochets nait pour chaque kg de truites consommé ($0 \leq \gamma \leq 1$).
- Une masse $\delta m_B(n)$ de brochets meurt ($0 \leq \delta \leq 1$).

Mettre le système en équations et écrire une fonction `simuTB(a, b, c, d, t0, b0, N)` simulant l'évolution de la population pour $1 \leq n \leq N$ avec $m_T(0) = t_0$ et $m_B(0) = b_0$. Faire les représentations graphiques adéquates. Tester différents jeux de paramètres.
Indication : On pourra tester `simuTB`$(0.05, 0.001, 0.2, 0.03, 100, 100, 1000)$ *et* `simuTB`$(0.1, 0.001, 0.5, 0.05, 50, 200, 500)$.

[1] Affiche un diagramme connu sous le nom de diagramme de Feigenbaum.