Exercice 3

Énoncé

Dans $\mathbb{R}^4$, soient $F = \{(a+b, a-b, a, 0),\ a, b \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(y, x, y, x-y),\ x, y \in \mathbb{R}\}$.

1. Trouver des bases de $F, G, F \cap G, F + G$.

Exercice 3

Énoncé

Dans $\mathbb{R}^4$, soient $F = \{(a+b, a-b, a, 0),\ a, b \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(y, x, y, x-y),\ x, y \in \mathbb{R}\}$.

1. Trouver des bases de $F, G, F \cap G, F + G$.
2. Donner des équations de $F, G, F \cap G, F + G$ en nombre minimal dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Base de F

Soit $v \in F$, on a

Base de F

Soit $v \in F$, on a

$$v = (a + b, a - b, a, 0), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Base de F

Soit $v \in F$, on a

$$\begin{aligned} v &= (a+b, a-b, a, 0), \quad a, b \in \mathbb{R} \\ &= (a, a, a, 0) + (b, -b, 0, 0) \end{aligned}$$

Base de F

Soit $v \in F$, on a

$$\begin{aligned} v &= (a+b, a-b, a, 0), \quad a, b \in \mathbb{R} \\ &= (a, a, a, 0) + (b, -b, 0, 0) \\ &= a(1, 1, 1, 0) + b(1, -1, 0, 0). \end{aligned}$$

Base de F

Soit $v \in F$, on a

$$\begin{aligned} v &= (a+b, a-b, a, 0), \quad a, b \in \mathbb{R} \\ &= (a, a, a, 0) + (b, -b, 0, 0) \\ &= a(1, 1, 1, 0) + b(1, -1, 0, 0). \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F} := \{(1, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 0)\}$

Base de F

Soit $v \in F$, on a

$$\begin{aligned} v &= (a+b, a-b, a, 0), \quad a, b \in \mathbb{R} \\ &= (a, a, a, 0) + (b, -b, 0, 0) \\ &= a(1, 1, 1, 0) + b(1, -1, 0, 0). \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F} := \{(1, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 0)\}$ est donc génératrice de F.

Base de F

Soit $v \in F$, on a

$$\begin{aligned} v &= (a+b, a-b, a, 0), \quad a, b \in \mathbb{R} \\ &= (a, a, a, 0) + (b, -b, 0, 0) \\ &= a(1, 1, 1, 0) + b(1, -1, 0, 0). \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F} := \{(1, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 0)\}$ est donc génératrice de F.
Cette famille est clairement libre

Base de F

Soit $v \in F$, on a

$$\begin{aligned} v &= (a+b, a-b, a, 0), \quad a, b \in \mathbb{R} \\ &= (a, a, a, 0) + (b, -b, 0, 0) \\ &= a(1, 1, 1, 0) + b(1, -1, 0, 0). \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F} := \{(1, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 0)\}$ est donc génératrice de F.
Cette famille est clairement libre, c'est donc une base de F.

Base de G

Soit $v \in G$, on a

Base de G

Soit $v \in G$, on a

$$v = (y, x, y, x - y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Base de G

Soit $v \in G$, on a

$$\begin{aligned} v &= (y, x, y, x - y), \quad x, y \in \mathbb{R} \\ &= (0, x, 0, x) + (y, 0, y, -y) \end{aligned}$$

Base de G

Soit $v \in G$, on a

$$\begin{aligned} v &= (y, x, y, x - y), \quad x, y \in \mathbb{R} \\ &= (0, x, 0, x) + (y, 0, y, -y) \\ &= x(0, 1, 0, 1) + y(1, 0, 1, -1). \end{aligned}$$

Base de G

Soit $v \in G$, on a

$$\begin{aligned} v &= (y, x, y, x - y), \quad x, y \in \mathbb{R} \\ &= (0, x, 0, x) + (y, 0, y, -y) \\ &= x(0, 1, 0, 1) + y(1, 0, 1, -1). \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{G} := \{(0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, -1)\}$

Base de G

Soit $v \in G$, on a

$$\begin{aligned} v &= (y, x, y, x - y), \quad x, y \in \mathbb{R} \\ &= (0, x, 0, x) + (y, 0, y, -y) \\ &= x(0, 1, 0, 1) + y(1, 0, 1, -1). \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{G} := \{(0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, -1)\}$ est donc génératrice de G.

Base de G

Soit $v \in G$, on a

$$\begin{aligned} v &= (y, x, y, x - y), \quad x, y \in \mathbb{R} \\ &= (0, x, 0, x) + (y, 0, y, -y) \\ &= x(0, 1, 0, 1) + y(1, 0, 1, -1). \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{G} := \{(0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, -1)\}$ est donc génératrice de G.
Cette famille est clairement libre

Base de G

Soit $v \in G$, on a

$$\begin{aligned} v &= (y, x, y, x - y), \quad x, y \in \mathbb{R} \\ &= (0, x, 0, x) + (y, 0, y, -y) \\ &= x(0, 1, 0, 1) + y(1, 0, 1, -1). \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{G} := \{(0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, -1)\}$ est donc génératrice de G.
Cette famille est clairement libre, c'est donc une base de G.

Base de $F \cap G$

Soit $v = (a + b, a - b, a, 0) \in F$.

Base de $F \cap G$

Soit $v = (a + b, a - b, a, 0) \in F$. On cherche des conditions sur a et b pour que $v \in G$,

Base de $F \cap G$

Soit $v = (a+b, a-b, a, 0) \in F$. On cherche des conditions sur a et b pour que $v \in G$, i.e. existe des réels x et y tels que $(y, x, y, x-y) = (a+b, a-b, a, 0)$.

Base de $F \cap G$

Soit $v = (a+b, a-b, a, 0) \in F$. On cherche des conditions sur a et b pour que $v \in G$, i.e. existe des réels x et y tels que $(y, x, y, x-y) = (a+b, a-b, a, 0)$.Dans un système cela donne :

Base de $F \cap G$

Soit $v = (a+b, a-b, a, 0) \in F$. On cherche des conditions sur a et b pour que $v \in G$, i.e. existe des réels x et y tels que $(y, x, y, x-y) = (a+b, a-b, a, 0)$.Dans un système cela donne :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = a+b \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

Base de $F \cap G$

Soit $v = (a+b, a-b, a, 0) \in F$. On cherche des conditions sur a et b pour que $v \in G$, i.e. existe des réels x et y tels que $(y, x, y, x-y) = (a+b, a-b, a, 0)$.Dans un système cela donne :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = a+b \\ x = a-b \\ \\ \\ \end{cases}$$

Base de $F \cap G$

Soit $v = (a+b, a-b, a, 0) \in F$. On cherche des conditions sur a et b pour que $v \in G$, i.e. existe des réels x et y tels que $(y, x, y, x-y) = (a+b, a-b, a, 0)$.Dans un système cela donne :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = a+b \\ x = a-b \\ y = a \end{cases}$$

Base de $F \cap G$

Soit $v = (a+b, a-b, a, 0) \in F$. On cherche des conditions sur a et b pour que $v \in G$, i.e. existe des réels x et y tels que $(y, x, y, x-y) = (a+b, a-b, a, 0)$.Dans un système cela donne :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = a+b \\ x = a-b \\ y = a \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Base de $F \cap G$

Soit $v = (a+b, a-b, a, 0) \in F$. On cherche des conditions sur a et b pour que $v \in G$, i.e. existe des réels x et y tels que $(y, x, y, x-y) = (a+b, a-b, a, 0)$.Dans un système cela donne :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = a+b \\ x = a-b \\ y = a \\ x-y = 0 \end{cases}$$

On tente alors de résoudre le système en x, y.

Base de $F \cap G$

$$\begin{cases} x - y = & 0 \quad (\ell_4) \\ \\ \\ \end{cases}$$

Base de $F \cap G$

$$\begin{cases} x - y = 0 & (\ell_4) \\ y = a & (\ell_3) \end{cases}$$

Base de $F \cap G$

$$\begin{cases} x - y = 0 & (\ell_4) \\ y = a & (\ell_3) \\ y = a - b & (\ell_2 - \ell_4) \end{cases}$$

Base de $F \cap G$

$$\begin{cases} x - y = 0 & (\ell_4) \\ y = a & (\ell_3) \\ y = a - b & (\ell_2 - \ell_4) \\ y = a + b & (\ell_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ \\ \\ \end{cases}$$

Base de $F \cap G$

$$\begin{cases} x - y = 0 & (\ell_4) \\ y = a & (\ell_3) \\ y = a - b & (\ell_2 - \ell_4) \\ y = a + b & (\ell_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y = a \\ \\ \end{cases}$$

Base de $F \cap G$

$$\begin{cases} x - y = 0 & (\ell_4) \\ y = a & (\ell_3) \\ y = a - b & (\ell_2 - \ell_4) \\ y = a + b & (\ell_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y = a \\ 0 = -b \end{cases}$$

Base de $F \cap G$

$$\begin{cases} x - y = 0 & (\ell_4) \\ y = a & (\ell_3) \\ y = a - b & (\ell_2 - \ell_4) \\ y = a + b & (\ell_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 & \\ y = a & \\ 0 = -b & (\ell \\ 0 = b & (\ell \end{cases}$$

Base de $F \cap G$

$$\begin{cases} x - y = 0 & (\ell_4) \\ y = a & (\ell_3) \\ y = a - b & (\ell_2 - \ell_4) \\ y = a + b & (\ell_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 & \\ y = a & \\ 0 = -b & (\ell \\ 0 = b & (\ell \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ \\ \end{cases}$$

Base de $F \cap G$

$$\begin{cases} x - y = 0 & (\ell_4) \\ y = a & (\ell_3) \\ y = a - b & (\ell_2 - \ell_4) \\ y = a + b & (\ell_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 & \\ y = a & \\ 0 = -b & (\ell \\ 0 = b & (\ell \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y = a \\ \end{cases}$$

Base de $F \cap G$

$$\begin{cases} x - y = 0 & (\ell_4) \\ y = a & (\ell_3) \\ y = a - b & (\ell_2 - \ell_4) \\ y = a + b & (\ell_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 & \\ y = a & \\ 0 = -b & (\ell \\ 0 = b & (\ell \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y = a \\ 0 = b \end{cases}$$

Base de $F \cap G$

$$\begin{cases} x - y = 0 & (\ell_4) \\ y = a & (\ell_3) \\ y = a - b & (\ell_2 - \ell_4) \\ y = a + b & (\ell_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 & \\ y = a & \\ 0 = -b & (\ell \\ 0 = b & (\ell \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y = a \\ 0 = b \end{cases}$$

Donc $v = (a + b, a - b, a, 0) \in G \Leftrightarrow b = 0$.

Base de $F \cap G$

$$\begin{cases} x - y = 0 & (\ell_4) \\ y = a & (\ell_3) \\ y = a - b & (\ell_2 - \ell_4) \\ y = a + b & (\ell_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 & \\ y = a & \\ 0 = -b & (\ell \\ 0 = b & (\ell \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y = a \\ 0 = b \end{cases}$$

Donc $v = (a + b, a - b, a, 0) \in G \Leftrightarrow b = 0$.
$F \cap G = \{v \in \mathbb{R}^4 | v = (a, a, a, 0) = a(1, 1, 1, 0)\}$

Base de $F \cap G$

$$\begin{cases} x - y = 0 & (\ell_4) \\ y = a & (\ell_3) \\ y = a - b & (\ell_2 - \ell_4) \\ y = a + b & (\ell_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 & \\ y = a & \\ 0 = -b & (\ell \\ 0 = b & (\ell \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y = a \\ 0 = b \end{cases}$$

Donc $v = (a + b, a - b, a, 0) \in G \Leftrightarrow b = 0$.
$F \cap G = \{v \in \mathbb{R}^4 | v = (a, a, a, 0) = a(1, 1, 1, 0)\}$
Une base de $F \cap G$ est

Base de $F \cap G$

$$\begin{cases} x - y = 0 & (\ell_4) \\ y = a & (\ell_3) \\ y = a - b & (\ell_2 - \ell_4) \\ y = a + b & (\ell_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 & \\ y = a & \\ 0 = -b & (\ell \\ 0 = b & (\ell \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y = a \\ 0 = b \end{cases}$$

Donc $v = (a + b, a - b, a, 0) \in G \Leftrightarrow b = 0$.
$F \cap G = \{v \in \mathbb{R}^4 | v = (a, a, a, 0) = a(1, 1, 1, 0)\}$
Une base de $F \cap G$ est$\{(1, 1, 1, 0)\}$.

Base de $F + G$

Rappel

L'espace vectoriel $F + G$ est l'ensemble des vecteurs qui peuvent s'écrire

Base de $F + G$

Rappel

L'espace vectoriel $F + G$ est l'ensemble des vecteurs qui peuvent s'écrire $f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.

Base de $F + G$

Rappel

L'espace vectoriel $F + G$ est l'ensemble des vecteurs qui peuvent s'écrire $f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.

Proposition

Une famille génératrice de $F + G$

Base de $F + G$

Rappel

L'espace vectoriel $F + G$ est l'ensemble des vecteurs qui peuvent s'écrire $f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.

Proposition

Une famille génératrice de $F + G$est la réunion d'une base de F et d'une base de G.

Base de $F + G$

Rappel

L'espace vectoriel $F + G$ est l'ensemble des vecteurs qui peuvent s'écrire $f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.

Proposition

Une famille génératrice de $F + G$est la réunion d'une base de F et d'une base de G.

Preuve :

Soient $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ une base de F

Base de $F + G$

Rappel

L'espace vectoriel $F + G$ est l'ensemble des vecteurs qui peuvent s'écrire $f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.

Proposition

Une famille génératrice de $F + G$est la réunion d'une base de F et d'une base de G.

Preuve :

Soient $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ une base de Fet $\{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ une base de G.

Base de $F + G$

Rappel

L'espace vectoriel $F + G$ est l'ensemble des vecteurs qui peuvent s'écrire $f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.

Proposition

Une famille génératrice de $F + G$est la réunion d'une base de F et d'une base de G.

Preuve :

Soient $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ une base de Fet $\{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ une base de G. Les éléments de $F + G$ sont donc les vecteurs de la forme

$$f + g =$$

Base de $F + G$

Rappel

L'espace vectoriel $F + G$ est l'ensemble des vecteurs qui peuvent s'écrire $f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.

Proposition

Une famille génératrice de $F + G$est la réunion d'une base de F et d'une base de G.

Preuve :

Soient $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ une base de Fet $\{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ une base de G. Les éléments de $F + G$ sont donc les vecteurs de la forme

$$f + g = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots \lambda_n f_n + \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \cdots \mu_m g_m$$

Base de $F + G$

Pour trouver une base de $F + G$ on echelonne la matrice associée à une famille génératrice pour trouver une famille libre.

Base de $F + G$

Pour trouver une base de $F + G$ on echelonne la matrice associée à une famille génératrice pour trouver une famille libre.Avec les questions précédentes,
$\mathcal{F} = \{(1, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 0)\}$ et $\mathcal{G} = \{(0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, -1)\}$ sont des bases de F et de G.

Base de $F + G$

Pour trouver une base de $F + G$ on echelonne la matrice associée à une famille génératrice pour trouver une famille libre.Avec les questions précédentes,
$\mathcal{F} = \{(1, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 0)\}$ et $\mathcal{G} = \{(0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, -1)\}$ sont des bases de F et de G.

$$\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$$

Base de $F + G$

Pour trouver une base de $F + G$ on echelonne la matrice associée à une famille génératrice pour trouver une famille libre.Avec les questions précédentes,
$\mathcal{F} = \{(1,1,1,0),(1,-1,0,0)\}$ et $\mathcal{G} = \{(0,1,0,1),(1,0,1,-1)\}$ sont des bases de F et de G.

$$\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \right.$$

Base de $F + G$

Pour trouver une base de $F + G$ on echelonne la matrice associée à une famille génératrice pour trouver une famille libre.Avec les questions précédentes,
$\mathcal{F} = \{(1,1,1,0),(1,-1,0,0)\}$ et $\mathcal{G} = \{(0,1,0,1),(1,0,1,-1)\}$ sont des bases de F et de G.

$$\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Base de $F + G$

Pour trouver une base de $F + G$ on echelonne la matrice associée à une famille génératrice pour trouver une famille libre.Avec les questions précédentes,
$\mathcal{F} = \{(1,1,1,0),(1,-1,0,0)\}$ et $\mathcal{G} = \{(0,1,0,1),(1,0,1,-1)\}$ sont des bases de F et de G.

$$\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Et on fait le pivot de Gauss :

Base de $F + G$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \right.$$

Base de $F + G$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Base de $F + G$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{-v_2+v_1} \right.$$

Base de $F + G$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{-v_2+v_1}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$$

Base de $F + G$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underset{-v_2+v_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underset{-v_4+v}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right.$$

Base de $F + G$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underset{-v_2+v_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underset{-v_4+v}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right.$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$$

Base de $F + G$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underset{-v_2+v_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underset{-v_4+v}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right.$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$$

Base de $F + G$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{-v_2+v_1}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{-v_4+v} \right.$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$$

Base de $F + G$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underset{-v_2+v_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{-v_4+v} \right.$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$$

Base de $F + G$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underset{-v_2+v_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{-v_4+v} \right.$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$$

Base de $F + G$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{-v_2+v_1}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{-v_4+v} \right.$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{v_3-2v_2} \right)$$

Base de $F + G$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underset{-v_2+v_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underset{v_3-2v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \right)$$

La famille obtenue est libre et toujours génératrice donc c'est une base.

Équations de F

Un vecteur $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ est dans F si, et seulement si, il existe a et b réels tels que $(x, y, z, t) = (a + b, a - b, a, 0)$

Équations de F

Un vecteur $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ est dans F si, et seulement si, il existe a et b réels tels que $(x, y, z, t) = (a + b, a - b, a, 0)$, i.e.

$$\begin{cases} a + b & = & x \\ & & \\ & & \\ & & \end{cases}$$

Équations de F

Un vecteur $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ est dans F si, et seulement si, il existe a et b réels tels que $(x, y, z, t) = (a + b, a - b, a, 0)$, i.e.

$$\begin{cases} a + b & = & x \\ a - b & = & y \\ & & \\ & & \end{cases}$$

Équations de F

Un vecteur $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ est dans F si, et seulement si, il existe a et b réels tels que $(x, y, z, t) = (a + b, a - b, a, 0)$, i.e.

$$\begin{cases} a + b &= x \\ a - b &= y \\ a &= z \\ \end{cases}$$

Équations de F

Un vecteur $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ est dans F si, et seulement si, il existe a et b réels tels que $(x, y, z, t) = (a + b, a - b, a, 0)$, i.e.

$$\begin{cases} a + b &= x \\ a - b &= y \\ a &= z \\ 0 &= t \end{cases}$$

Équations de F

Un vecteur $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ est dans F si, et seulement si, il existe a et b réels tels que $(x, y, z, t) = (a + b, a - b, a, 0)$, i.e.

$$\begin{cases} a + b &= x \\ a - b &= y \\ a &= z \\ 0 &= t \end{cases}$$

On echelonne ce système :

Équations de F

$$\begin{cases} a+b & = & x \\ & & \\ & & \end{cases}$$

Équations de F

$$\begin{cases} a+b & = & x \\ a-b & = & y \\ & & \\ & & \end{cases}$$

Équations de F

$$\begin{cases} a+b & = & x & & \\ a-b & = & & y & \\ a & = & & & z \\ & & & & \end{cases}$$

Équations de F

$$\begin{cases} a+b &= x \\ a-b &= y \\ a &= z \\ 0 &= t \end{cases}$$

Équations de F

$$\begin{cases} a+b & = & x & & \\ a-b & = & & y & \\ a & = & & & z \\ & 0 = & t & & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+ & b & = & x \\ & & & \end{cases}$$

Équations de F

$$\begin{cases} a+b &= x \\ a-b &= y \\ a &= z \\ 0 &= t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b &= x \\ 2b &= x-y \\ & \\ & \end{cases} \quad ($$

Équations de F

$$\begin{cases} a+b &= x \\ a-b &= y \\ a &= z \\ 0 &= t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b &= x \\ 2b &= x-y \\ b &= x-z \end{cases} \quad (

Équations de F

$$\begin{cases} a+b & = & x & & \\ a-b & = & & y & \\ a & = & & & z \\ & 0 = t & & & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+ & b & = & x & \\ & 2b & = & x-y & \\ & b & = & x & -z \\ & 0 = t & & & \end{cases}$$

Équations de F

$$\begin{cases} a+b & = & x \\ a-b & = & y \\ a & = & z \\ & 0 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+ & b & = & x \\ & 2b & = & x-y \\ & b & = & x & -z \\ & & 0 = t \end{cases} (\text{L}_2 \leftarrow \text{L}_2 - \text{L}_1) (\text{L}_3 \leftarrow \text{L}_3 - \text{L}_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+ & b & = & x \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{cases}$$

Équations de F

$$\begin{cases} a+b & = & x \\ a-b & = & y \\ a & = & z \\ 0 & = & t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b & = & x \\ 2b & = & x-y \\ b & = & x-z \\ 0 & = & t \end{cases} (
$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b & = & x \\ 2b & = & x-y \end{cases}$$

Équations de F

$$\begin{cases} a+b &= x \\ a-b &= y \\ a &= z \\ 0 &= t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b &= x \\ 2b &= x-y \\ b &= x-z \\ 0 &= t \end{cases} (\ell_2 - \ell_1) \; (\ell_3 - \ell_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b &= x \\ 2b &= x-y \\ 0 &= x+y-2z \\ & \end{cases} (2\ell_3 - \ell_2)$$

Équations de F

$$\begin{cases} a+b &= x \\ a-b &= y \\ a &= z \\ 0 &= t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b &= x \\ 2b &= x-y \\ b &= x-z \\ 0 &= t \end{cases} (\ell_2 - \ell_1) (\ell_3 - \ell_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b &= x \\ 2b &= x-y \\ 0 &= x+y-2z \\ 0 &= t \end{cases} (2\ell_3 - \ell_2)$$

Équations de F

$$\begin{cases} a+b &= x \\ a-b &= y \\ a &= z \\ 0 &= t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b &= x \\ 2b &= x-y \\ b &= x-z \\ 0 &= t \end{cases} (\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1) (\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b &= x \\ 2b &= x-y \\ 0 &= x+y-2z \\ 0 &= t \end{cases} (2\ell_3 - \ell_2)$$

Autrement dit, le vecteur $v = (x, y, z, t)$ appartient à F

Équations de F

$$\begin{cases} a+b &= x \\ a-b &= y \\ a &= z \\ 0 &= t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b &= x \\ 2b &= x-y \\ b &= x-z \\ 0 &= t \end{cases} (\ell_2 - \ell_1) \; (\ell_3 - \ell_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b &= x \\ 2b &= x-y \\ 0 &= x+y-2z \\ 0 &= t \end{cases} (2\ell_3 - \ell_2)$$

Autrement dit, le vecteur $v = (x, y, z, t)$ appartient à F si et seulement si

Équations de F

$$\begin{cases} a+b &= x \\ a-b &= y \\ a &= z \\ 0 &= t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b &= x \\ 2b &= x-y \\ b &= x-z \\ 0 &= t \end{cases} \quad (\ell_2 - \ell_1) \quad (\ell_3 - \ell_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b &= x \\ 2b &= x-y \\ 0 &= x+y-2z \\ 0 &= t \end{cases} \quad (2\ell_3 - \ell_2)$$

Autrement dit, le vecteur $v = (x, y, z, t)$ appartient à F si et seulement si

$$\begin{cases} x+y-2z = 0 \\ \end{cases}$$

Équations de F

$$\begin{cases} a+b &= x \\ a-b &= y \\ a &= z \\ 0 &= t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b &= x \\ 2b &= x-y \\ b &= x-z \\ 0 &= t \end{cases} (\ell_2 - \ell_1) \; (\ell_3 - \ell_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b &= x \\ 2b &= x-y \\ 0 &= x+y-2z \\ 0 &= t \end{cases} (2\ell_3 - \ell_2)$$

Autrement dit, le vecteur $v = (x, y, z, t)$ appartient à F si et seulement si

$$\begin{cases} x+y-2z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

.

Équations de G

Pour obtenir les équations de G on va utiliser une autre méthode.

Équations de G

Pour obtenir les équations de G on va utiliser une autre méthode.

Proposition

Soit $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ une base d'un S.E.V. G; un vecteur v appartient à G si, et seulement si, la famille $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, v\}$ est liée.

Équations de G

Pour obtenir les équations de G on va utiliser une autre méthode.

Proposition

Soit $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ une base d'un S.E.V. G; un vecteur v appartient à G si, et seulement si, la famille $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, v\}$ est liée.

Preuve :

Si $v \in G$, alors il s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $g_1, g_2, \ldots, g_n$, donc la famille $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, v\}$ est liée.

Équations de G

Pour obtenir les équations de G on va utiliser une autre méthode.

Proposition

Soit $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ une base d'un S.E.V. G; un vecteur v appartient à G si, et seulement si, la famille $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, v\}$ est liée.

Preuve :

Si $v \in G$, alors il s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $g_1, g_2, \ldots, g_n$, donc la famille $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, v\}$ est liée. Réciproquement, si $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, v\}$ est liée,

Équations de G

Pour obtenir les équations de G on va utiliser une autre méthode.

Proposition

Soit $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ une base d'un S.E.V. G; un vecteur v appartient à G si, et seulement si, la famille $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, v\}$ est liée.

Preuve :

Si $v \in G$, alors il s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $g_1, g_2, \ldots, g_n$, donc la famille $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, v\}$ est liée. Réciproquement, si $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, v\}$ est liée,alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et μ, non tous nuls

Équations de G

Pour obtenir les équations de G on va utiliser une autre méthode.

Proposition

Soit $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ une base d'un S.E.V. G; un vecteur v appartient à G si, et seulement si, la famille $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, v\}$ est liée.

Preuve :

Si $v \in G$, alors il s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $g_1, g_2, \ldots, g_n$, donc la famille $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, v\}$ est liée. Réciproquement, si $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, v\}$ est liée,alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et μ, non tous nuls, tels que $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n + \mu v = 0$.

Équations de G

Pour obtenir les équations de G on va utiliser une autre méthode.

Proposition

Soit $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ une base d'un S.E.V. G; un vecteur v appartient à G si, et seulement si, la famille $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, v\}$ est liée.

Preuve :

Si $v \in G$, alors il s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $g_1, g_2, \ldots, g_n$, donc la famille $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, v\}$ est liée. Réciproquement, si $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, v\}$ est liée,alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et μ, non tous nuls, tels que $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n + \mu v = 0$. Or, la famille $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ est libre donc $\mu \neq 0$.

Équations de G

Pour obtenir les équations de G on va utiliser une autre méthode.

Proposition

Soit $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ une base d'un S.E.V. G; un vecteur v appartient à G si, et seulement si, la famille $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, v\}$ est liée.

Preuve :

Si $v \in G$, alors il s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $g_1, g_2, \ldots, g_n$, donc la famille $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, v\}$ est liée. Réciproquement, si $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, v\}$ est liée,alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et μ, non tous nuls, tels que $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n + \mu v = 0$. Or, la famille $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ est libre donc $\mu \neq 0$. Comme $\mu \neq 0$, on peut donc écrire

Équations de G

Pour obtenir les équations de G on va utiliser une autre méthode.

Proposition

Soit $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ une base d'un S.E.V. G; un vecteur v appartient à G si, et seulement si, la famille $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, v\}$ est liée.

Preuve :

Si $v \in G$, alors il s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $g_1, g_2, \ldots, g_n$, donc la famille $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, v\}$ est liée. Réciproquement, si $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, v\}$ est liée,alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et μ, non tous nuls, tels que $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n + \mu v = 0$. Or, la famille $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ est libre donc $\mu \neq 0$. Comme $\mu \neq 0$, on peut donc écrire $v = -\frac{\lambda_1}{\mu} g_1 - \frac{\lambda_2}{\mu} g_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\mu} g_n$, donc $v \in G$.

Équations de G

On utilise ce résultat pour trouver les équations de G.

Équations de G

On utilise ce résultat pour trouver les équations de G.
On prend $g_1 = (1, 0, 1, -1)$ et $g_2 = (0, 1, 0, 1)$ comme base de G et $v = (x, y, z, t)$ quelconque.

Équations de G

On utilise ce résultat pour trouver les équations de G.
On prend $g_1 = (1, 0, 1, -1)$ et $g_2 = (0, 1, 0, 1)$ comme base de G et $v = (x, y, z, t)$ quelconque. On considère la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right)$$

Équations de G

On utilise ce résultat pour trouver les équations de G.
On prend $g_1 = (1, 0, 1, -1)$ et $g_2 = (0, 1, 0, 1)$ comme base de G et $v = (x, y, z, t)$ quelconque. On considère la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right)$$

Et on échelonne.

Équations de G

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right)$$

Équations de G

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \right.$$

Équations de G

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \right.$$

Équations de G

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\underset{v_3-xv_1}{\begin{pmatrix}0\\y\\z-x\\t+x\end{pmatrix}}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\right.$$

Équations de G

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\underset{v_3-xv_1}{\begin{pmatrix}0\\y\\z-x\\t+x\end{pmatrix}}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\right.$$

Équations de G

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\underset{v_3-xv_1}{\begin{pmatrix}0\\y\\z-x\\t+x\end{pmatrix}}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\underset{v_3-yv_1}{\begin{pmatrix}0\\0\\z-x\\t+x-y\end{pmatrix}}\right)$$

Équations de G

Cette famille est donc liée si, et seulement si,

$$\begin{cases} z - x = 0 \\ t + x - y = 0 \end{cases}$$

.

Équations de $F \cap G$.

Comme on connaît une base de $F \cap G$, on peut aussi utiliser la méthode de la question précédente.

Équations de $F \cap G$.

Comme on connaît une base de $F \cap G$, on peut aussi utiliser la méthode de la question précédente.Un vecteur $v = (x, y, z, t)$ appartient à $F \cap G$

Équations de $F \cap G$.

Comme on connaît une base de $F \cap G$, on peut aussi utiliser la méthode de la question précédente.Un vecteur $v = (x, y, z, t)$ appartient à $F \cap G$si et seulement si la famille $\{(1, 1, 1, 0), (x, y, z, t)\}$ est liée

Équations de $F \cap G$.

Comme on connaît une base de $F \cap G$, on peut aussi utiliser la méthode de la question précédente.Un vecteur $v = (x, y, z, t)$ appartient à $F \cap G$si et seulement si la famille $\{(1, 1, 1, 0), (x, y, z, t)\}$ est liée. Considérons

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \right.$$

Équations de $F \cap G$.

Comme on connaît une base de $F \cap G$, on peut aussi utiliser la méthode de la question précédente.Un vecteur $v = (x, y, z, t)$ appartient à $F \cap G$si et seulement si la famille $\{(1, 1, 1, 0), (x, y, z, t)\}$ est liée. Considérons

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right)$$

Équations de $F \cap G$.

Comme on connaît une base de $F \cap G$, on peut aussi utiliser la méthode de la question précédente.Un vecteur $v = (x, y, z, t)$ appartient à $F \cap G$si et seulement si la famille $\{(1, 1, 1, 0), (x, y, z, t)\}$ est liée. Considérons

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \right.$$

Équations de $F \cap G$.

Comme on connaît une base de $F \cap G$, on peut aussi utiliser la méthode de la question précédente.Un vecteur $v = (x, y, z, t)$ appartient à $F \cap G$si et seulement si la famille $\{(1, 1, 1, 0), (x, y, z, t)\}$ est liée. Considérons

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y-x \\ z-x \\ t \\ v_2 - x v_1 \end{pmatrix} \right)$$

Équations de $F \cap G$.

Comme on connaît une base de $F \cap G$, on peut aussi utiliser la méthode de la question précédente.Un vecteur $v = (x, y, z, t)$ appartient à $F \cap G$si et seulement si la famille $\{(1, 1, 1, 0), (x, y, z, t)\}$ est liée. Considérons

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y - x \\ z - x \\ t \\ v_2 - x v_1 \end{pmatrix} \right)$$

Cette famille est donc liée si, et seulement si,

Équations de $F \cap G$.

Comme on connaît une base de $F \cap G$, on peut aussi utiliser la méthode de la question précédente.Un vecteur $v = (x, y, z, t)$ appartient à $F \cap G$si et seulement si la famille $\{(1, 1, 1, 0), (x, y, z, t)\}$ est liée. Considérons

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y-x \\ z-x \\ t \\ v_2 - x v_1 \end{pmatrix} \right)$$

Cette famille est donc liée si, et seulement si,

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ z - x = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Équations de $F \cap G$.

Comme on connaît une base de $F \cap G$, on peut aussi utiliser la méthode de la question précédente.Un vecteur $v = (x, y, z, t)$ appartient à $F \cap G$si et seulement si la famille $\{(1, 1, 1, 0), (x, y, z, t)\}$ est liée. Considérons

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y-x \\ z-x \\ t \\ v_2 - x v_1 \end{pmatrix} \right)$$

Cette famille est donc liée si, et seulement si,

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ z - x = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Ce sont donc les équations de $F \cap G$.

Équations de $F + G$.

Je considère donc

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \right.$$

Équations de $F + G$.

Je considère donc

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \right.$$

Équations de $F + G$.

Je considère donc

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \right.$$

Équations de $F + G$.

Je considère donc

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right)$$

Équations de $F + G$.

Je considère donc

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \right.$$

Équations de $F + G$.

Je considère donc

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \right.$$

Équations de $F + G$.

Je considère donc

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \right.$$

Équations de $F + G$.

Je considère donc

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\y-x\\z-x\\t\end{pmatrix}}_{v_4 - x v_1}\right)$$

Équations de $F + G$.

Je considère donc

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\y-x\\z-x\\t\end{pmatrix}}_{v_4 - x v_1}\right)$$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\right.$$

Équations de $F + G$.

Je considère donc

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\y-x\\z-x\\t\end{pmatrix}}_{v_4 - x v_1}\right)$$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\right.$$

Équations de $F + G$.

Je considère donc

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\y-x\\z-x\\t\end{pmatrix}}_{v_4 - x v_1}\right)$$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix},\right.$$

Équations de $F + G$.

Je considère donc

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\y-x\\z-x\\t\end{pmatrix}}_{v_4 - x v_1}\right)$$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\z-x\\t-y+x\end{pmatrix}}_{v_4 - (y-x) v_2}\right) \rightsquigarrow$$

Équations de $F + G$.

Je considère donc

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\y-x\\z-x\\t\end{pmatrix}}_{v_4 - x v_1}\right)$$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\z-x\\t-y+x\end{pmatrix}}_{v_4-(y-x)v_2}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\right.$$

Équations de $F + G$.

Je considère donc

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix},\underbrace{\begin{pmatrix}0\\y-x\\z-x\\t\end{pmatrix}}_{v_4 - x v_1}\right)$$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix},\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\z-x\\t-y+x\end{pmatrix}}_{v_4-(y-x)v_2}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\right.$$

Équations de $F + G$.

Je considère donc

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\y-x\\z-x\\t\end{pmatrix}}_{v_4 - x v_1}\right)$$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\z-x\\t-y+x\end{pmatrix}}_{v_4-(y-x)v_2}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix},\right.$$

Équations de $F + G$.

Je considère donc

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\y-x\\z-x\\t\end{pmatrix}}_{v_4 - x v_1}\right)$$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\z-x\\t-y+x\end{pmatrix}}_{v_4-(y-x)v_2}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\t-y-x+\end{pmatrix}}_{v_4-(z-x)v_3}\right)$$

Équations de $F + G$.

Je considère donc

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\y-x\\z-x\\t\end{pmatrix}}_{v_4 - x v_1}\right)$$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\z-x\\t-y+x\end{pmatrix}}_{v_4-(y-x)v_2}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\t-y-x+2z\end{pmatrix}}_{v_4-(z-x)v_3}\right)$$

On a trouvé l'équation : $t - y - x + 2z = 0$

Exercice 5

Énoncé

On se place dans l'espace vectoriel des fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les quatre fonctions $f_1, \ldots, f_4$ définies par les formules suivantes sont linéairement indépendantes : $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos 2x$, $f_4(x) = \sin 3x$.

Exercice 5

Énoncé

On se place dans l'espace vectoriel des fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les quatre fonctions $f_1, \ldots, f_4$ définies par les formules suivantes sont linéairement indépendantes : $f_1(x) = 1,\ f_2(x) = \sin x,\ f_3(x) = \cos 2x,\ f_4(x) = \sin 3x$.
2. $1, \sin 2x, (\sin x)^2$ sont-elles linéairement indépendantes ?

Exercice 5

Énoncé

On se place dans l'espace vectoriel des fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les quatre fonctions $f_1, \ldots, f_4$ définies par les formules suivantes sont linéairement indépendantes : $f_1(x) = 1,\ f_2(x) = \sin x,\ f_3(x) = \cos 2x,\ f_4(x) = \sin 3x$.
2. $1, \sin 2x, (\sin x)^2$ sont-elles linéairement indépendantes ?
3. $1, \cos 2x, (\sin x)^2$ sont-elles linéairement indépendantes ?

Exercice 5

Énoncé

On se place dans l'espace vectoriel des fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les quatre fonctions $f_1, \ldots, f_4$ définies par les formules suivantes sont linéairement indépendantes : $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos 2x$, $f_4(x) = \sin 3x$.
2. $1, \sin 2x, (\sin x)^2$ sont-elles linéairement indépendantes ?
3. $1, \cos 2x, (\sin x)^2$ sont-elles linéairement indépendantes ?
4. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $f_a(x) = e^{ax}$. Montrer que f_a et f_b sont linéairement indépendantes ssi a et b sont distincts.

Exercice 5

Énoncé

On se place dans l'espace vectoriel des fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les quatre fonctions $f_1, \ldots, f_4$ définies par les formules suivantes sont linéairement indépendantes : $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos 2x$, $f_4(x) = \sin 3x$.
2. $1, \sin 2x, (\sin x)^2$ sont-elles linéairement indépendantes ?
3. $1, \cos 2x, (\sin x)^2$ sont-elles linéairement indépendantes ?
4. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $f_a(x) = e^{ax}$. Montrer que f_a et f_b sont linéairement indépendantes ssi a et b sont distincts.

Question 1

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des nombres réels

Question 1

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des nombres réels tels que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

Question 1

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des nombres réels tels que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

i.e.

$$\lambda_1 + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos(2x) + \lambda_4 \sin(3x) = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

Question 1

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des nombres réels tels que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

i.e.

$$\lambda_1 + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos(2x) + \lambda_4 \sin(3x) = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. En choisissant successivement pour x les valeurs 0,

Question 1

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des nombres réels tels que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

i.e.

$$\lambda_1 + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos(2x) + \lambda_4 \sin(3x) = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. En choisissant successivement pour x les valeurs $0, \pi/2,$

Question 1

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des nombres réels tels que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

i.e.

$$\lambda_1 + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos(2x) + \lambda_4 \sin(3x) = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. En choisissant successivement pour x les valeurs $0, \pi/2, \pi/4,$

Question 1

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des nombres réels tels que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

i.e.

$$\lambda_1 + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos(2x) + \lambda_4 \sin(3x) = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. En choisissant successivement pour x les valeurs $0, \pi/2, \pi/4, -\pi/4,$

Question 1

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des nombres réels tels que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

i.e.

$$\lambda_1 + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos(2x) + \lambda_4 \sin(3x) = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. En choisissant successivement pour x les valeurs $0, \pi/2, \pi/4, -\pi/4$, on obtient le système

Question 1

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des nombres réels tels que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

i.e.

$$\lambda_1 + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos(2x) + \lambda_4 \sin(3x) = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. En choisissant successivement pour x les valeurs $0, \pi/2, \pi/4, -\pi/4$, on obtient le système

$$\begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases} \quad \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

Question 1

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des nombres réels tels que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

i.e.

$$\lambda_1 + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos(2x) + \lambda_4 \sin(3x) = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. En choisissant successivement pour x les valeurs $0, \pi/2, \pi/4, -\pi/4$, on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Question 1

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des nombres réels tels que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

i.e.

$$\lambda_1 + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos(2x) + \lambda_4 \sin(3x) = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. En choisissant successivement pour x les valeurs $0, \pi/2, \pi/4, -\pi/4$, on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \sqrt{2}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Question 1

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des nombres réels tels que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

i.e.

$$\lambda_1 + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos(2x) + \lambda_4 \sin(3x) = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. En choisissant successivement pour x les valeurs $0, \pi/2, \pi/4, -\pi/4$, on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \sqrt{2}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \sqrt{2}\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Question 1

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des nombres réels tels que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

i.e.

$$\lambda_1 + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos(2x) + \lambda_4 \sin(3x) = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. En choisissant successivement pour x les valeurs $0, \pi/2, \pi/4, -\pi/4$, on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \sqrt{2}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \sqrt{2}\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

dont on voit facilement qu'il a pour unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

Question 1

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des nombres réels tels que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

i.e.

$$\lambda_1 + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos(2x) + \lambda_4 \sin(3x) = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. En choisissant successivement pour x les valeurs $0, \pi/2, \pi/4, -\pi/4$, on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \sqrt{2}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \sqrt{2}\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

dont on voit facilement qu'il a pour unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Donc les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 sont linéairement indépendantes.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 & (\ell_1) \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 & (\ell_2) \\ \sqrt{2}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 & (\ell_3) \\ 2\sqrt{2}\lambda_1 = 0 & (\ell_3 + \ell_4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 & (\ell_1) \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 & (\ell_2) \\ \sqrt{2}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 & (\ell_3) \\ 2\sqrt{2}\lambda_1 = 0 & (\ell_3 + \ell_4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_3 = 0 & (\ell_1 - \ell_3) \\ \lambda_2 - \lambda_4 = 0 & (\ell_2) \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 & (\ell_3) \\ \lambda_1 = 0 & (\ell_4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 & (\ell_1) \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 & (\ell_2) \\ \sqrt{2}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 & (\ell_3) \\ 2\sqrt{2}\lambda_1 = 0 & (\ell_3 + \ell_4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_3 = 0 & (\ell_1 - \ell_3) \\ \lambda_2 - \lambda_4 = 0 & (\ell_2) \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 & (\ell_3) \\ \lambda_1 = 0 & (\ell_4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_3 = 0 & (\ell_1) \\ \lambda_2 = 0 & (\frac{1}{2}\ell_2 + \frac{1}{2}\ell_3) \\ \lambda_4 = 0 & (-\frac{1}{2}\ell_2 + \frac{1}{2}\ell_3) \\ \lambda_1 = 0 & (\ell_4) \end{cases}$$

Question 2

Soient α, β, γ des nombres réels

Question 2

Soient α, β, γ des nombres réels tels que

$$\alpha + \beta \sin(2x) + \gamma \sin^2 x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Question 2

Soient α, β, γ des nombres réels tels que

$$\alpha + \beta \sin(2x) + \gamma \sin^2 x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

En choisissant successivement pour x

Question 2

Soient α, β, γ des nombres réels tels que

$$\alpha + \beta \sin(2x) + \gamma \sin^2 x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

En choisissant successivement pour x les valeurs 0,

Question 2

Soient α, β, γ des nombres réels tels que

$$\alpha + \beta \sin(2x) + \gamma \sin^2 x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

En choisissant successivement pour x les valeurs $0, \pi/2,$

Question 2

Soient α, β, γ des nombres réels tels que

$$\alpha + \beta \sin(2x) + \gamma \sin^2 x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

En choisissant successivement pour x les valeurs $0, \pi/2, \pi/4$,

Question 2

Soient α, β, γ des nombres réels tels que

$$\alpha + \beta \sin(2x) + \gamma \sin^2 x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

En choisissant successivement pour x les valeurs $0, \pi/2, \pi/4$,on obtient le système

$$\begin{cases} \alpha = 0 \end{cases}$$

Question 2

Soient α, β, γ des nombres réels tels que

$$\alpha + \beta \sin(2x) + \gamma \sin^2 x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

En choisissant successivement pour x les valeurs $0, \pi/2, \pi/4$,on obtient le système

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

Question 2

Soient α, β, γ des nombres réels tels que

$$\alpha + \beta \sin(2x) + \gamma \sin^2 x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

En choisissant successivement pour x les valeurs $0, \pi/2, \pi/4$,on obtient le système

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \frac{1}{2}\gamma = 0 \end{cases}$$

Question 2

Soient α, β, γ des nombres réels tels que

$$\alpha + \beta \sin(2x) + \gamma \sin^2 x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

En choisissant successivement pour x les valeurs $0, \pi/2, \pi/4$,on obtient le système

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \frac{1}{2}\gamma = 0 \end{cases}$$

dont on voit qu'il a pour unique solution $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Question 2

Soient α, β, γ des nombres réels tels que

$$\alpha + \beta \sin(2x) + \gamma \sin^2 x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

En choisissant successivement pour x les valeurs $0, \pi/2, \pi/4$,on obtient le système

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \frac{1}{2}\gamma = 0 \end{cases}$$

dont on voit qu'il a pour unique solution $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
Les fonctions $1, \sin(2x), \sin^2 x$ sont donc linéairement indépendantes.

Question 3

On sait que $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$.

Question 3

On sait que $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$.
On a une relation $a \times 1 + b\cos(2x) + c\sin^2 x = 0$ valable pour tout x en prenant $a = 1, b = -1, c = -2$.

Question 3

On sait que $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$.
On a une relation $a \times 1 + b\cos(2x) + c\sin^2 x = 0$ valable pour tout x en prenant $a = 1, b = -1, c = -2$. Donc les trois fonctions ne sont pas linéairement indépendantes.

Question 4

On se donne deux nombres réels distincts a et b.

Question 4

On se donne deux nombres réels distincts a et b. Soient α et β des scalaires tels que $\alpha f_a + \beta f_b = 0$,

Question 4

On se donne deux nombres réels distincts a et b. Soient α et β des scalaires tels que $\alpha f_a + \beta f_b = 0$, c'est-à-dire tels que $\alpha e^{ax} + \beta e^{bx} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Question 4

On se donne deux nombres réels distincts a et b. Soient α et β des scalaires tels que $\alpha f_a + \beta f_b = 0$, c'est-à-dire tels que $\alpha e^{ax} + \beta e^{bx} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Si $\beta \neq 0$, alors

Question 4

On se donne deux nombres réels distincts a et b. Soient α et β des scalaires tels que $\alpha f_a + \beta f_b = 0$, c'est-à-dire tels que $\alpha e^{ax} + \beta e^{bx} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Si $\beta \neq 0$, alors on a $e^{(b-a)x} = -\alpha/\beta$

Question 4

On se donne deux nombres réels distincts a et b. Soient α et β des scalaires tels que $\alpha f_a + \beta f_b = 0$, c'est-à-dire tels que $\alpha e^{ax} + \beta e^{bx} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Si $\beta \neq 0$, alors on a $e^{(b-a)x} = -\alpha/\beta$ ce qui implique que la fonction $x \mapsto e^{(b-a)x}$ est constante,

Question 4

On se donne deux nombres réels distincts a et b. Soient α et β des scalaires tels que $\alpha f_a + \beta f_b = 0$, c'est-à-dire tels que $\alpha e^{ax} + \beta e^{bx} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Si $\beta \neq 0$, alors on a $e^{(b-a)x} = -\alpha/\beta$ ce qui implique que la fonction $x \mapsto e^{(b-a)x}$ est constante, ce qui est absurde; donc $\beta = 0$.

Question 4

On se donne deux nombres réels distincts a et b. Soient α et β des scalaires tels que $\alpha f_a + \beta f_b = 0$, c'est-à-dire tels que $\alpha e^{ax} + \beta e^{bx} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Si $\beta \neq 0$, alors on a $e^{(b-a)x} = -\alpha/\beta$ ce qui implique que la fonction $x \mapsto e^{(b-a)x}$ est constante, ce qui est absurde; donc $\beta = 0$.
On montre de la même manière que $\alpha = 0$,

Question 4

On se donne deux nombres réels distincts a et b. Soient α et β des scalaires tels que $\alpha f_a + \beta f_b = 0$, c'est-à-dire tels que $\alpha e^{ax} + \beta e^{bx} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Si $\beta \neq 0$, alors on a $e^{(b-a)x} = -\alpha/\beta$ ce qui implique que la fonction $x \mapsto e^{(b-a)x}$ est constante, ce qui est absurde; donc $\beta = 0$.
On montre de la même manière que $\alpha = 0$, donc les fonctions f_a et f_b sont linéairement indépendantes.

Question 4

On se donne deux nombres réels distincts a et b. Soient α et β des scalaires tels que $\alpha f_a + \beta f_b = 0$, c'est-à-dire tels que $\alpha e^{ax} + \beta e^{bx} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Si $\beta \neq 0$, alors on a $e^{(b-a)x} = -\alpha/\beta$ ce qui implique que la fonction $x \mapsto e^{(b-a)x}$ est constante, ce qui est absurde; donc $\beta = 0$.
On montre de la même manière que $\alpha = 0$, donc les fonctions f_a et f_b sont linéairement indépendantes. Si $a = b$, les fonctions f_a et f_b sont égales,

Question 4

On se donne deux nombres réels distincts a et b. Soient α et β des scalaires tels que $\alpha f_a + \beta f_b = 0$, c'est-à-dire tels que $\alpha e^{ax} + \beta e^{bx} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Si $\beta \neq 0$, alors on a $e^{(b-a)x} = -\alpha/\beta$ ce qui implique que la fonction $x \mapsto e^{(b-a)x}$ est constante, ce qui est absurde; donc $\beta = 0$.
On montre de la même manière que $\alpha = 0$, donc les fonctions f_a et f_b sont linéairement indépendantes. Si $a = b$, les fonctions f_a et f_b sont égales, donc ne sont pas linéairement indépendantes.