Énoncé

Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1, 2, 3)$ et $v = (3, 2, 1)$.

1. Vérifier que u et v ne sont pas colinéaires, en déduire la dimension de H.

Énoncé

Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1, 2, 3)$ et $v = (3, 2, 1)$.

1. Vérifier que u et v ne sont pas colinéaires, en déduire la dimension de H.
2. Montrer que H est aussi engendré par $u' = (1, 1, 1)$ et $v' = (0, 1, 2)$.

Énoncé

Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1, 2, 3)$ et $v = (3, 2, 1)$.

1. Vérifier que u et v ne sont pas colinéaires, en déduire la dimension de H.
2. Montrer que H est aussi engendré par $u' = (1, 1, 1)$ et $v' = (0, 1, 2)$.
3. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v)$ et $\mathcal{B}' = (u', v')$ sont deux bases de H.

Énoncé

Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1, 2, 3)$ et $v = (3, 2, 1)$.

1. Vérifier que u et v ne sont pas colinéaires, en déduire la dimension de H.
2. Montrer que H est aussi engendré par $u' = (1, 1, 1)$ et $v' = (0, 1, 2)$.
3. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v)$ et $\mathcal{B}' = (u', v')$ sont deux bases de H.
4. Soit $w \in H$ de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{B}$ et (x', y') dans $\mathcal{B}'$. Calculer (x, y) en fonction de (x', y'), puis (x', y') en fonction de (x, y).

Question 1

Les deux vecteurs u et v ne sont pas colinéaires

Question 1

Les deux vecteurs u et v ne sont pas colinéaires car le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

est non nul.

Question 1

Les deux vecteurs u et v ne sont pas colinéaires car le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

est non nul. La famille $\{u, v\}$ est donc libre.

Question 1

Les deux vecteurs u et v ne sont pas colinéaires car le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

est non nul. La famille $\{u, v\}$ est donc libre.

La dimension de $H = \text{Vect}(u, v)$ est donc égale à 2.

Question 2

On cherche à exprimer u' et v' en fonction de u et v et réciproquement.

Question 2

On cherche à exprimer u' et v' en fonction de u et v et réciproquement. En examinant un peu les vecteurs, on constate que

$$\begin{cases} u = u' + v' \\ v = 3u' - v' \end{cases}$$

Question 2

On cherche à exprimer u' et v' en fonction de u et v et réciproquement. En examinant un peu les vecteurs, on constate que

$$\begin{cases} u = u' + v' \\ v = 3u' - v' \end{cases}$$

Pour le faire de façon générale, on résout les systèmes (en x et y) suivants :

- $u = xu' + yv'$
- $v = xu' + yv'$

Question 2

On cherche à exprimer u' et v' en fonction de u et v et réciproquement. En examinant un peu les vecteurs, on constate que

$$\begin{cases} u = u' + v' \\ v = 3u' - v' \end{cases}$$

Pour le faire de façon générale, on résout les systèmes (en x et y) suivants :

- $u = xu' + yv'$
- $v = xu' + yv'$

Cela montre que u et v sont des combinaisons linéaires de u' et v', donc appartiennent à $\text{Vect}(u', v')$, d'où l'inclusion $\text{Vect}(u, v) \subset \text{Vect}(u', v')$.

Réciproquement, à partir du système précédent, on obtient

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}v \\ v' = \frac{3}{4}u - \frac{1}{4}v \end{cases}$$

On en déduit que u' et v' sont dans $\text{Vect}(u, v)$, donc que $\text{Vect}(u', v') \subset \text{Vect}(u, v)$. D'où l'égalité.

Question 3

On sait déjà que la famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de H, donc est une base de H.

Question 3

On sait déjà que la famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de H, donc est une base de H. De plus, on a démontré que la famille $\mathcal{B}'$ était aussi génératrice de H.

Question 3

On sait déjà que la famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de H, donc est une base de H. De plus, on a démontré que la famille $\mathcal{B}'$ était aussi génératrice de H.Comme son cardinal est égal à la dimension de H, il s'agit nécessairement d'une base de H.

Question 4

Dire que (x, y) sont les coordonnées de w dans la base $\mathcal{B}$ signifie que $w = xu + yv$.

Question 4

Dire que (x, y) sont les coordonnées de w dans la base $\mathcal{B}$ signifie que $w = xu + yv$. En utilisant les relations du premier système ci-dessus, on obtient

$$w = x(u' + v') + y(3u' - v') = (x + 3y)u' + (x - y)v',$$

Question 4

Dire que (x, y) sont les coordonnées de w dans la base $\mathcal{B}$ signifie que $w = xu + yv$. En utilisant les relations du premier système ci-dessus, on obtient

$$w = x(u' + v') + y(3u' - v') = (x + 3y)u' + (x - y)v',$$

donc les coordonnées (x', y') de w dans la base $\mathcal{B}'$ sont données en fonction de (x, y) par

Question 4

Dire que (x, y) sont les coordonnées de w dans la base $\mathcal{B}$ signifie que $w = xu + yv$. En utilisant les relations du premier système ci-dessus, on obtient

$$w = x(u' + v') + y(3u' - v') = (x + 3y)u' + (x - y)v',$$

donc les coordonnées (x', y') de w dans la base $\mathcal{B}'$ sont données en fonction de (x, y) par

$$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = x - y \end{cases}$$

Question 4

Dire que (x, y) sont les coordonnées de w dans la base $\mathcal{B}$ signifie que $w = xu + yv$. En utilisant les relations du premier système ci-dessus, on obtient

$$w = x(u' + v') + y(3u' - v') = (x + 3y)u' + (x - y)v',$$

donc les coordonnées (x', y') de w dans la base $\mathcal{B}'$ sont données en fonction de (x, y) par

$$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = x - y \end{cases}$$

En inversant le système on trouve

Question 4

Dire que (x, y) sont les coordonnées de w dans la base $\mathcal{B}$ signifie que $w = xu + yv$. En utilisant les relations du premier système ci-dessus, on obtient

$$w = x(u' + v') + y(3u' - v') = (x + 3y)u' + (x - y)v',$$

donc les coordonnées (x', y') de w dans la base $\mathcal{B}'$ sont données en fonction de (x, y) par

$$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = x - y \end{cases}$$

En inversant le système on trouve

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}x' + \frac{3}{4}y' \\ y = \frac{1}{4}x' - \frac{1}{4}y' \end{cases}$$

Énoncé

Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^4$ formé des (x, y, z, t) tels que

$$\begin{cases} 9x + 13y + 30z + 19t = 0 \\ 8x + 9y + 19z + 22t = 0 \\ x - y - 4z + 7t = 0 \end{cases}$$

On commence par échelonner le système :

On commence par échelonner le système :

$$\begin{cases} x - y - 4z + 7t = 0 & (\ell_3) \\ 22y + 66z - 44t = 0 & (\ell_1 - 9\ell_3) \\ 17y + 51z - 34t = 0 & (\ell_2 - 8\ell_3) \end{cases}$$

On commence par échelonner le système :

$$\begin{cases} x - y - 4z + 7t = 0 & (\ell_3) \\ 22y + 66z - 44t = 0 & (\ell_1 - 9\ell_3) \\ 17y + 51z - 34t = 0 & (\ell_2 - 8\ell_3) \end{cases}$$

En divisant la deuxième ligne par 22 et la troisième par 17, on constate qu'il s'agit de la même équation

$$y + 3z - 2t = 0$$

On commence par échelonner le système :

$$\begin{cases} x - y - 4z + 7t = 0 & (\ell_3) \\ 22y + 66z - 44t = 0 & (\ell_1 - 9\ell_3) \\ 17y + 51z - 34t = 0 & (\ell_2 - 8\ell_3) \end{cases}$$

En divisant la deuxième ligne par 22 et la troisième par 17, on constate qu'il s'agit de la même équation

$$y + 3z - 2t = 0$$

Le système s'écrit donc

$$\begin{cases} x - y - 4z + 7t = 0 \\ y + 3z - 2t = 0 \end{cases}$$

On commence par échelonner le système :

$$\begin{cases} x - y - 4z + 7t = 0 & (\ell_3) \\ 22y + 66z - 44t = 0 & (\ell_1 - 9\ell_3) \\ 17y + 51z - 34t = 0 & (\ell_2 - 8\ell_3) \end{cases}$$

En divisant la deuxième ligne par 22 et la troisième par 17, on constate qu'il s'agit de la même équation

$$y + 3z - 2t = 0$$

Le système s'écrit donc

$$\begin{cases} x - y - 4z + 7t = 0 \\ y + 3z - 2t = 0 \end{cases}$$

Les variables en tête de ligne, donc x et y ici, sont dites "liées".

On commence par échelonner le système :

$$\begin{cases} x - y - 4z + 7t = 0 & (\ell_3) \\ 22y + 66z - 44t = 0 & (\ell_1 - 9\ell_3) \\ 17y + 51z - 34t = 0 & (\ell_2 - 8\ell_3) \end{cases}$$

En divisant la deuxième ligne par 22 et la troisième par 17, on constate qu'il s'agit de la même équation

$$y + 3z - 2t = 0$$

Le système s'écrit donc

$$\begin{cases} x - y - 4z + 7t = 0 \\ y + 3z - 2t = 0 \end{cases}$$

Les variables en tête de ligne, donc x et y ici, sont dites "liées".Les autres, z et t, sont dites "libres".

On commence par échelonner le système :

$$\begin{cases} x - y - 4z + 7t = 0 & (\ell_3) \\ 22y + 66z - 44t = 0 & (\ell_1 - 9\ell_3) \\ 17y + 51z - 34t = 0 & (\ell_2 - 8\ell_3) \end{cases}$$

En divisant la deuxième ligne par 22 et la troisième par 17, on constate qu'il s'agit de la même équation

$$y + 3z - 2t = 0$$

Le système s'écrit donc

$$\begin{cases} x - y - 4z + 7t = 0 \\ y + 3z - 2t = 0 \end{cases}$$

Les variables en tête de ligne, donc x et y ici, sont dites "liées".Les autres, z et t, sont dites "libres". Le nombre de variables libres donne la dimension du sous-espace, car on voit bien que x et y peuvent s'exprimer en fonction de z et t.

On commence par échelonner le système :

$$\begin{cases} x - y - 4z + 7t = 0 & (\ell_3) \\ 22y + 66z - 44t = 0 & (\ell_1 - 9\ell_3) \\ 17y + 51z - 34t = 0 & (\ell_2 - 8\ell_3) \end{cases}$$

En divisant la deuxième ligne par 22 et la troisième par 17, on constate qu'il s'agit de la même équation

$$y + 3z - 2t = 0$$

Le système s'écrit donc

$$\begin{cases} x - y - 4z + 7t = 0 \\ y + 3z - 2t = 0 \end{cases}$$

Les variables en tête de ligne, donc x et y ici, sont dites "liées".Les autres, z et t, sont dites "libres". Le nombre de variables libres donne la dimension du sous-espace, car on voit bien que x et y peuvent s'exprimer en fonction de z et t.

En effet, le système peut s'écrire :

$$\begin{cases} x - y &= 4z - 7t \\ y &= -3z + 2t \end{cases}$$

En effet, le système peut s'écrire :

$$\begin{cases} x - y &= 4z - 7t \\ y &= -3z + 2t \end{cases}$$

et se résout en

$$\begin{cases} x = z - 5t \\ y = -3z + 2t. \end{cases}$$

En effet, le système peut s'écrire :

$$\begin{cases} x - y &= 4z - 7t \\ y &= -3z + 2t \end{cases}$$

et se résout en

$$\begin{cases} x = z - 5t \\ y = -3z + 2t. \end{cases}$$

Les éléments de V sont donc les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ de la forme

$$(z - 5t, -3z + 2t, z, t) = z(1, -3, 1, 0) + t(-5, 2, 0, 1),$$

avec $z, t \in \mathbb{R}$.

En effet, le système peut s'écrire :

$$\begin{cases} x - y &= 4z - 7t \\ y &= -3z + 2t \end{cases}$$

et se résout en

$$\begin{cases} x = z - 5t \\ y = -3z + 2t. \end{cases}$$

Les éléments de V sont donc les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ de la forme

$$(z - 5t, -3z + 2t, z, t) = z(1, -3, 1, 0) + t(-5, 2, 0, 1),$$

avec $z, t \in \mathbb{R}$.
On en déduit que la famille $\{(1, -3, 1, 0), (-5, 2, 0, 1)\}$ est génératrice de V.

En effet, le système peut s'écrire :

$$\begin{cases} x - y &= 4z - 7t \\ y &= -3z + 2t \end{cases}$$

et se résout en

$$\begin{cases} x = z - 5t \\ y = -3z + 2t. \end{cases}$$

Les éléments de V sont donc les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ de la forme

$$(z - 5t, -3z + 2t, z, t) = z(1, -3, 1, 0) + t(-5, 2, 0, 1),$$

avec $z, t \in \mathbb{R}$.
On en déduit que la famille $\{(1, -3, 1, 0), (-5, 2, 0, 1)\}$ est génératrice de V. Comme elle est clairement libre (regardez les 2 dernières coordonnées de chaque vecteur), c'est une base de V.