Feuille d'exercices n° 1

Solutions

Exercice 1 – Les ensembles formés des couples (x,y) de nombres réels vérifiant les conditions suivantes sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?
1) $3x-2y=0$, 2) $xy=0$, 3) $x^2+y^2=1$, 4) $x^2+y^2=0$, 5) $y=2x^2$,
6) $x+|y|=0$, 7) $x^2+4y^2=4xy$, 8) $x\geqslant 0$, 9) $\exists z\in\mathbb{R}$ tel que $x^5+y^5=z^5$.

Solution : Pour chaque numéro, on note E_i le sous-ensemble des éléments vérifiant l'équation i.
L'ensemble E_3 ne contient pas le zéro $(0,0)$ de $\mathbb{R}^2$ (i.e. ne possède pas d'élément neutre), ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel. Tous les autres contiennent bien l'élément $(0,0)$, il faut donc vérifier pour chacun d'eux la stabilité par addition et par multiplication par un scalaire.

1. Soient (x,y) et (x',y') vérifiant l'équation 1 et λ un réel. On a $3(x+\lambda x')-2(y+\lambda y')=3x-2y+\lambda(3x'-2y')=0$ donc E_1 est un sous-espace vectoriel.
2. $(1,0)$ et $(0,1)$ vérifient l'équation 2 mais pas leur somme $(1,1)$, ce n'est pas un espace vectoriel.
3. L'espace E_4 est réduit à $(0,0)$ qui est l'unique espace vectoriel de dimension 0.
4. $(1,2)$ vérifie l'équation 5 mais son double $(2,4)$ ne la satisfait pas.
5. $(-4,4)$ et $(-4,-4)$ sont dans E_6, mais leur somme $(-8,0)$ n'y est pas.
6. L'équation 7 peut être réduite à $x-2y=0$ puisque $x^2+4y^2-4xy=(x-2y)^2$. Soient (x,y) et (x',y') vérifiant l'équation 7 et λ un réel. On a $(x+\lambda x')-2(y+\lambda y')=x-2y+\lambda(x'-2y')=0$, donc E_7 est un sous-espace vectoriel.
7. Si l'on choisit $\lambda<0$ et $x\geqslant 0$ alors pour n'importe quel $y\in\mathbb{R}$, $(x,y)\in E_8$ mais $\lambda x<0$ et $(\lambda x,\lambda y)\notin E_8$.
8. Pour tout réel a, il existe $z\in\mathbb{R}$ tel que $z^5=a$. En particulier pour tous les couples $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, il existe toujours $z\in\mathbb{R}$ tel que $z^5=x^5+y^5$. Donc E_9 est $\mathbb{R}^2$ tout entier, qui est bien un espace vectoriel.

Exercice 2 – Soit m un paramètre réel fixé. Montrer que les triplets réels de la forme (x,y,m) forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $m=0$.

Solution : Si $m\neq 0$ alors $(0,0,0)$ n'est pas dans ce sous-ensemble et donc ce sous-ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel. Si $m=0$, l'élément neutre est présent dans ce sous-ensemble et pour tout couple (x,y) et (x',y') de $\mathbb{R}^2$ et pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $(x+\lambda x',y+\lambda y',0)$ est toujours un triplet de la forme $(X,Y,0)\in\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 – Soient a,b,c,d quatre nombres réels. A quelle condition les éléments $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tels que $ax+by+cz+d=0$ forment-ils un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Donner une interprétation géométrique de cette condition.

Solution : À la condition que $d=0$, sinon $\mathbf{0}=(0,0,0)$ n'appartient pas au sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ déterminé par $ax+by+cz+d=0$. On montre réciproquement que si $d=0$, ce sous-ensemble est un sous-espace.
Interprétation géométrique : Dans la famille de plans affines $ax+by+cz+d=0$ de $\mathbb{R}^3$, les plans vectoriels sont ceux qui passent par $\mathbf{0}=(0,0,0)$.

Exercice 4 – On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}$. Quels sont les sous-espace vectoriel de E ? Même question pour $\mathbb{R}^2$.

Solution : L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}$ contient deux sous-espaces : l'espace réduit à $\{0\}$ et $\mathbb{R}$ lui-même. En effet, (0) est toujours un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel et un espace vectoriel est toujours un sous-espace vectoriel de lui-même. Montrons que ce sont les seuls sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}$. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ non réduit à (0). F contient donc un élément non nul que l'on notera x. Tout réel y peut s'écrire $y = \frac{y}{x}x$. Par conséquent, comme $x \in F$ alors $y \in F$. $\mathbb{R}$ est donc inclus dans F. On en déduit que $F = \mathbb{R}$. Pour $\mathbb{R}^2$, on a $\{0\}$, tous les s.e.v. de la forme $\{(x,y)|ax+by=0\}$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ et $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir si les sous-ensembles de $\mathbb{R}_n[X]$ suivants sont des sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Si c'est le cas, en donner un base.

1) $A = \{P \in \mathbb{R}_n[X] | P(0) = 0\}$. 2) $B = \{P \in \mathbb{R}_n[X] | P' = 0\}$.

Solution :

1. L'élément nul, i.e. polynôme nul, est bien dans A puisqu'il vérifie $P(0) = 0$. Soient P et Q deux polynômes s'annulant en 0 et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(P+\lambda Q)(0) = P(0) + \lambda Q(0) = 0$ donc A est bien un espace vectoriel.
   On sait qu'un polynôme qui s'annule en 0 se factorise par X, en particulier, tout élément de la base canonique $\{1, X, X^2, \cdots, X^n\}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ admet X comme facteur, sauf l'élément 1. Une base de A est donc $\{X, X^2, \cdots, X^n\}$.
2. La dérivée du polynôme nul est encore le polynôme nul et vérifie bien les conditions pour appartenir à B. La dérivation est linéaire, i.e. la dérivée de la somme est bien la somme des dérivées et pour deux polynômes de dérivées nulles la dérivée de leur somme est encore nulle. Le même raisonnement pour la multiplication par un scalaire permet d'affirmer que B est aussi un espace vectoriel.
   Un polynôme de dérivée nulle est constant, une base de B est donc $\{1\}$.

Exercice 6 – Les matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{C})$$

telles que $a + d = 0$ forment-elles un espace vectoriel ? Si oui, en donner une base.

Solution : Les matrices en question forment un sous-espace vectoriel F de l'espace des matrices $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{C})$ vu en cours. Le prouver. Une base de F est

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 7 – Les sous-ensembles de $\mathbb{R}_3[X]$ suivants sont-ils des sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$? Si oui, en donner une base.

$A = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(3) = 2P(1)\}$, $B = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(2) = 2\}$, $C = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P' \text{ est une fonction paire}\}$,
$D = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(5) = 0\}$, $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(-2) = P(2) = 0\}$ $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | \forall t \in \mathbb{R}\ tP'(t) = P(t)\}$.

Solution :

A Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(3) = 2P(1)$ et $Q(3) = 2Q(1)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $(P + \lambda Q)(3) = P(3) + \lambda Q(3) = 2P(1) + 2\lambda Q(1) = 2(P + \lambda Q)(1)$ et le polynôme nul vérifie bien la condition donc A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
Pour le calcul d'une base on propose deux résolutions différentes :

— On raisonne sur le degré de $P \in A$. Si P est constant égal à $a \in \mathbb{R}$, alors $P(3) = 2P(1)$ est vérifiée si, et seulement si, $a = 0$. Si P est unitaire [1] de degré 1, cette même condition nous dit que P s'écrit $P(X) = X + 1$. Si P est unitaire degré 2, en remplaçant P par $P - c(X+1)$, on peux supposer que son terme constant s'annule. On se retrouve donc dans la situation où P s'écrit $X^2 + bX$ et la condition devient $9 + 3b = 2 + 2b$. Le polynôme $X^2 - 7X$ est donc dans A. Si P est unitaire de degré 3, par le même raisonnement que précédemment, on peux supposer que son terme constant est nul et il en va de même pour le coefficient de degré 1. On se retrouve avec $P(X) = X^3 + bX^2$ et la condition devient $27 + 9b = 2(1+b)$ ce qui est équivalent à $b = -\frac{25}{7}$. Une base possible de A est donc

$$\{X + 1, X^2 - 7X, 7X^3 - 25X^2\}$$

— Soit $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors P appartient à A si, et seulement si, $P(3) = 2P(1)$, c'est à dire $27a + 9b + 3c + d = 2a + 2b + 2c + 2d$ ou de façon équivalente $d = 25a + 7b + c$. Si P est constant, la relation obtenue nous dit que P est nul. Si P est de degré 1 et unitaire, c'est à dire $a = b = 0$ et $c = 1$, on obtient $P(X) = X + 1$. Si P est de degré 2 et unitaire, c'est à dire $a = 0$ et $b = 1$, on obtient $P(X) = X^2 + cX + (7 + c)$, ce qui devient $P(X) = X^2 + 7$ pour $c = 0$. Si P est de degré 3 et unitaire, c'est à dire $a = 1$, on obtient $P(X) = X^3 + bX^2 + cX + (25 + 7b + c)$, ce qui devient $P(X) = X^3 + 25$ pour $b = c = 0$. Une base possible de A est donc

$$\{X + 1, X^2 + 7, X^3 + 25\}.$$

B Le polynôme nul ne vérifie pas la condition, B n'est pas un sous-espace vectoriel.

C Soient P et Q deux polynômes de C et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $(P + \lambda Q)'(-X) = P'(-X) + \lambda Q'(-X) = P'(X) + \lambda Q'(X) = (P + \lambda Q)'(X)$ par parité de P' et Q' et le polynôme nul vérifie bien la condition donc C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in E$. Son polynôme dérivé est $P = 3aX^2 + 2bX + c$. Demander que P' soit paire (i.e. pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P'(t) = P'(-t)$) est équivalent à demander que

$$3aX^2 + 2bX + c = 3a(-X)^2 + 2bX + c = 3aX^2 - 2bX + c.$$

Autrement dit, que $b = 0$. Ainsi, tout polynôme de E est de la forme $P = aX^3 + cX + d$. Une base de C possible est donc

$$\{1, X, X^3\}.$$

D Soient P et Q deux polynômes de D et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $(P + \lambda Q)(5) = P(5) + \lambda Q(5) = 0$ et le polynôme nul s'annule bien en 5 donc D est un sous-espace vectoriel.
Aucun polynôme constant non égal à 0 ne s'annule en 5 donc $\{1\} \notin D$. Pour qu'un polynôme s'annule en 5 il faut et il suffit qu'il se factorise par $X - 5$. En degré 1, le polynôme $X - 5$ se factorise évidemment ainsi, pour le degré 2 nous pouvons prendre $(X-5)^2$ et en degré 3 nous pouvons prendre de façon similaire $(X-5)^3$. Une base de D est donc

$$\{X - 5, (X-5)^2, (X-5)^3\}.$$

1. Un polynôme est unitaire si son coefficient dominant est égal à 1

E On remarque que cet espace est à l'intersection des deux sous-espaces vectoriels

$$E_+ = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(2) = 0\} \text{ et } E_- = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(-2) = 0\}$$

De la même façon que dans la question précédente, ces espaces sont bien des sous-espaces vectoriels. L'intersection est donc bien un sous-espace vectoriel. De plus, un polynôme s'annulant en ± 2 se factorise toujours par $(X-2)(X+2)$. On trouve donc facilement une base de E donnée par

$$\{(X-2)(X+2), X(X-2)(X+2)\}$$

F Soient P et Q deux polynômes de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $t(P+\lambda Q)'(t) = t(P'(t)+\lambda Q'(t)) = P(t)+\lambda Q(t)$ et le polynôme nul vérifie bien la condition $tP'(t) = P(t)$ donc E est un sous-espace vectoriel.
Aucun polynôme constant non nul ne vérifie l'équation. Si $P(X) = X + a$ alors $P \in E$ si, et seulement si, $t = t + a$ ce qui force a à être nul et $P(X) = X$ est dans E. Si $P(X) = X^2 + aX + b$, quitte à soustraire aX à P on peut supposer que P s'écrit $X^2 + b$. La condition pour que P soit dans E s'écrit maintenant $2t^2 = t^2 + b$ ce qui ne peux être vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$. Et finalement, si $P(X) = X^3 + aX^2 + b$ (on a encore supposé le terme devant le X nul par le même raisonnement que précédemment) on a $3t^3 + 2at^2 = t^3 + at^2 + b$ ce qui encore une fois ne peux être vérifié pour tout $t \in \mathbb{R}$. Une base de E est donc

$$\{X\}.$$

Exercice 8 – Dans chacun des cas ci-dessous, décider si $V \subset \mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel.

— $V = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

— $V = \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

— $V = \{(3x-y, 2x+5y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

— $V = \{(x^2-x, -x^2+x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

— $V = \{(x^3-x, x^3-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Solution :

— $V = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est un SEV.

— $V = \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est un SEV.

— $V = \{(3x-y, 2x+5y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ est $\mathbb{R}^2$ tout entier.

— $V = \{(x^2-x, -x^2+x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un SEV. En effet pour $x = 2$, l'élément $(2,-2)$ est dans V et pour $\lambda = -1$, $\lambda(2,-2)$ n'est pas dans V puisque $-2 = x^2 - x$ n'a pas de solution réelle.

— $V = \{(x^3-x, x^3-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est un SEV. Par bijectivité de $x \mapsto x^3 - x$, tout réel y admet un antécédent par cette fonction et V correspond donc à la diagonale de $\mathbb{R}^2$ qui est un SEV.

Exercice 9 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F, G deux sous-espace vectoriel de E.
Démontrer que : ($F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E) si et seulement si ($F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$).
Solution : Si $G \subseteq F$ (*resp.* si $F \subseteq G$) alors $G \cup F = F$ (*resp.* $G \cup F = G$) l'union est bien un sous-espace vectoriel. Supposons que l'on ait aucune des deux inclusions, alors il existe des éléments $f \in F$ et $g \in G$ tel que $f \notin G$ et $g \notin F$. Ainsi $f + g$ n'est ni dans G ni dans F et leur union n'est donc pas stable par addition et n'est, par conséquent, pas un sous-espace vectoriel.

Exercice 10 – Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Les sous-ensembles de E suivants sont-ils des sous-espace vectoriel de E ?
1) Les fonctions croissantes. 2) Les fonctions positives.
3) $F_\alpha = \{f \in E | \forall x \in \mathbb{R}_+ \; f(\alpha x) = \alpha f(x)\}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.
4) $G = \{f \in E | \exists a,b \in \mathbb{R} \; tq \; \forall x \in \mathbb{R} \; f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)\}$.
5) les fonctions continues. 6) Les fonctions bornées. 7) Les fonctions n-fois dérivables.
8) Les fonctions injectives.

Solution :

1. La fonction $f : x \mapsto x$ est croissante mais $-f : x \mapsto -x$ est décroissante. Le sous-ensemble des fonctions croissantes n'est pas stable par multiplication par un scalaire, ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel.
2. La fonction $f : x \mapsto 1$ est positive, mais $-1f : x \mapsto -1$ non. Par le même argument que précédemment, le sous-ensemble des fonctions positives n'est pas un sous-espace vectoriel.
3. Soient $f,g \in F_\alpha$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $(f+\lambda g)(\alpha x) = f(\alpha x) + \lambda g(\alpha x) = \alpha f(x) + \alpha\lambda g(x) = \alpha(f(x) + \lambda g(x))$ donc $f + \lambda g \in F_\alpha$. De plus, l'élément neutre, la fonction nulle vérifie bien la condition donc F_α est un sous-espace vectoriel.
4. Soient $f,g \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors il existe $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ et $g(x) = c\cos(x) + d\sin(x)$. On a alors $(f+\lambda g)(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \lambda(c\cos(x) + d\sin(x)) = (a+\lambda c)\cos(x) + (b + \lambda d)\sin(x)$ donc $f + \lambda g \in G$. De plus $0 = 0\cos(x) + 0\sin(x)$ donc l'élement neutre est bien dans G et on conclut que G est un sous-espace vectoriel.
5. Si f est une fonction continue et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors la fonction λf est toujours continue, la somme de fonctions continues est encore continue et la fonction identiquement nulle est bien continue donc l'ensemble des fonctions continues est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
6. Si f est une fonction bornée et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors la fonction λf est toujours bornée, la somme de fonctions bornées est encore bornée et la fonction identiquement nulle est bornée donc l'ensemble des fonctions continues est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
7. Si f est une fonction n-fois dérivable et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors la fonction λf est toujours n-fois dérivable. Par linéarité de la dérivation, la somme de fonction n-fois dérivables est encore n-fois dérivable et la fonction identiquement nulle est bien n-fois dérivable donc l'ensemble des fonctions continues est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
8. La fonction nulle n'est absolument pas injective, donc l'ensemble des fonctions injectives n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exercice 11 – Pour chacune des familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, dire si elle est libre, génératrice de $\mathbb{R}^3$, une base de $\mathbb{R}^3$, et donner une base de l'espace vectoriel engendré.

1. $\{v_1,v_2,v_3\}$ avec $v_1 = (-1,1,1)$, $v_2 = (1,-1,1)$, $v_3 = (1,1,-1)$.
2. $\{v_1,v_2,v_3\}$ avec $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3)$, $v_3 = (3,2,1)$.
3. $\{v_1,v_2\}$ avec $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (3,0,3)$.
4. $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ avec $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (2,3,1)$, $v_3 = (3,2,1)$, $v_4 = (1,1,1)$.

Solution :

1. La famille est libre si, et seulement, si $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \implies \lambda_i = 0, i = 1,2$ et 3. On réécrit alors cette condition sous forme de système :

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3 \\ 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

   Pour celles et ceux qui se souviennent du calcul et des propriétés du déterminant (vu en géométrie analytique), on a le résultat suivant : Soient $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, alors

$$v_1, v_2, v_3 \text{ est une base de } \mathbb{R}^3 \text{ si, et seulement si, } det(v_1, v_2, v_3) \neq 0$$

   Ici, le déterminant $\left| \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right|$ est égal à 4. La famille est donc libre et comporte trois vecteurs c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2. On peut remarquer que $v_2 + v_3 = 4v_1$, la famille est donc liée (et a fortiori, elle n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$). En ne retenant que v_2 et v_3 on obtient une famille libre qui engendre l'espace vectoriel $\langle v_2, v_3 \rangle$.
3. Encore une fois, on s'aperçoit facilement que $v_2 = 3v_1$, la famille n'est pas libre et le sous-espace vectoriel engendré admet pour base possible $\{v_1\}$.
4. Quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont nécessairement liés. On remarque que v_4 est dans le sous-espace vectoriel engendré par v_1 et v_3. De plus, Le déterminant $\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right|$ est non nul et donc la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$. On peut évidemment prendre $\{v_1, v_2, v_3\}$ comme base de l'espace vectoriel engendré, mais on peut aussi choisir la base canonique.

Exercice 12 – Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ on considère les vecteurs u, v, w et w' tels que $2u + v = w$ et $5u + 3v = w'$. Déterminer u et v en fonction de w et w'.
Solution : Il suffit d'inverser le système, on a alors $u = 3w - w'$ et $v = -5w + 2w'$.

Exercice 13 – Dans $\mathbb{R}^6$, soient $v_1 = (1,1,0,2,3,0)$, $v_2 = (1,1,1,2,3,0)$ et $v_3 = (1,1,0,2,3,1)$. Vérifier que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre, puis compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^6$ à l'aide des vecteurs de la base canonique.
Solution : On vérifie facilement que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ implique $\lambda_2 = 0$ (la 3ème coordonnée de v_1 et v_3 est nulle) ensuite on fait de même pour voir que $\lambda_3 = 0$ (la 6ème coordonnée de v_1 est nulle) et on déduit $\lambda_1 = 0$. On échelonne la matrice $\{v_1, v_2, v_3\}$ et on voit facilement que cette famille engendre le même espace que la famille donnée par v_1, e_3 et e_6. En rajoutant e_1, e_2 et e_4 on obtient toujours une famille libre qui est donc une base de $\mathbb{R}^6$.

Exercice 14 – 1) La famille $\{1, X + X^2, 2 + X + X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est-elle libre ? génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$?
2) La famille $\{1, 1 + X, 1 + X + X^2, X^2 + X^3 + X^4\}$ est-elle libre ? génératrice de $\mathbb{R}_4[X]$? Si oui + non aux questions précédentes, compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}_4[X]$.
Solution :

1. On remarque que $2 \times 1 + 1 + X = 2 + X + X^2$ et donc la famille n'est pas libre. Cette famille comporte 3 éléments liés et n'engendre donc qu'un sous-espace vectoriel de dimension strictement inférieure à 3. D'un autre côté, $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3, donc la famille $\{1, X + X^2, 2 + X + X^2\}$ ne peut être génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. On peut successivement remplacer la famille donnée par des combinaisons linéaires de ces éléments et obtenir $\{1,X,1+X+X^2,X^2+X^3+X^4\}$ puis $\{1,X,X^2,X^2+X^3+X^4\}$ et finalement $\{1,X,X^2,X^3+X^4\}$. On s'aperçoit, via le degré, que les éléments sont libres, il en va de même pour la famille du départ. Par le même raisonnement que précédemment, cette famille comporte 4 éléments mais $\mathbb{R}_4[X]$ est de dimension 5. Il faut donc rajouter un élément. En rajoutant X^3 à la famille on peut obtenir $\{1,X,X^2,X^3+X^4,X^3\}$ que l'on peut transformer plus simplement en $\{1,X,X^2,X^3,X^4\}$ qui est la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 15 – Pour quels $m \in \mathbb{R}$, la famille $\{(1+m,1-m),(1-m,1+m)\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?

Solution : Oui, pour $m \neq 0$ car $\left|\begin{pmatrix} 1+m & 1-m \\ 1-m & 1+m \end{pmatrix}\right| = 4m$.

Pour celles et ceux qui n'aiment pas l'utilisation du déterminant dans ce cas, on peut faire la preuve suivante :
On s'occupe premièrement des cas $m = \pm 1$. Si $m = 1$ alors la famille est $(2,0),(0,2)$ qui est juste la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (multipliée par 2). De la même façon, si $m = -1$ la famille est $(0,2),(2,0)$ qui est, à permutation près, la même base. On suppose maintenant que $m \neq \pm 1$.
La famille est libre si, et seulement si, $x(1+m,1-m)+y(1-m,1+m) = (0,0) \implies x = y = 0$. On écrit alors en système :

$$\begin{cases} x(1+m)+y(1-m)=0 \\ x(1-m)+y(1+m)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(1-m^2)+y(1-m)^2=0 \\ y(1+m)^2-y(1-m)^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(1-m^2)+y(1-m)^2=0 \\ y=0 \text{ ou } (1+m)^2-(1-m)^2=0 \end{cases}$$

Or, $(1+m)^2-(1-m)^2 = 0 \iff m = 0$. Si $m = 0$ la famille est alors $(1,1),(1,1)$ qui n'est évidemment pas libre. On suppose maintenant que $m \neq 0$, alors le système devient

$$\begin{cases} x(1-m^2)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Et comme on a supposer $m \neq \pm 1$, on a bien $x = y = 0$, i.e. la famille est libre.
Pour résumer, si $m = 0$, la famille est liée, dans les autres cas elle est libre.

Exercice 16 – Soit n un entier $\geqslant 1$. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Pour $i = 0,\ldots,n$, soit $f_i \in E$ tel que $\deg f_i = i$ (le polynôme nul a pour degré $-\infty$, par convention). Montrer que $(f_0,\ldots,f_n)$ est une base de E.
2. Montrer que si $a \in \mathbb{R}$, les $(X-a)^i$, $0 \leqslant i \leqslant n$, forment une base de E. Soit $F = \{p \in E \,|\, P'(a) = P''(a) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Donner une base de F.
3. Soient a,b deux réels distincts. Montrer que les $(X-a)^k(X-b)^{n-k}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, forment une base de E.

Solution : 1. Les polynômes sont de degrés deux-à-deux distincts, la famille est donc libre (lemme à prouver) et de là, c'est une base de l'espace-vectoriel E qui est de dimension $n+1$.
2. Cas particulier de la première question car $(X-a)^i$ est de degré i. On note $P_i = (X-a)^i$ et on calcule :

$$P_i' = i(X-a)^{i-1} \quad , \qquad P_i'' = i(i-1)(X-a)^{i-2} \, .$$

On a alors que $P_i'(a) = 0$ si et seulement si $i \neq 1$ et que $P_i''(a) = 0$ si et seulement si $i \neq 2$. On peut alors en déduire que $\{P_0,P_3,P_4,\ldots,P_n\}$ est une base de F.
3. On part de

$$\lambda_0(X-a)^n + \lambda_1(X-a)^{n-1}(X-b) + \cdots + \lambda_n(X-b)^n = 0 \, .$$

En faisant $X=a$, puis $X=b$, on obtient $\lambda_n=0$ puis $\lambda_0=0$. L'égalité devient alors

$$\lambda_1(X-a)^{n-1}(X-b)+\cdots+\lambda_{n-1}(X-a)(X-b)^{n-1}=0\,.$$

L'anneau des polynômes étant intègre, on peut simplifier par $(X-b)$ et on obtient

$$\lambda_1(X-a)^{n-1}+\lambda_2(X-a)^{n-2}(X-b)+\cdots+\lambda_{n-1}(X-a)(X-b)^{n-2}=0\,.$$

En faisant $X=b$, on obtient $\lambda_1=0$. Et de proche en proche, en simplifiant à chaque fois par $(X-b)$ puis en faisant $X=b$, on obtient $\lambda_2=0$, puis $\lambda_3=0,\ldots$

Exercice 17 – Soit S l'ensemble des suites réelles $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
1) Vérifier que S est un espace vectoriel.
2) Montrer qu'un élément x de S est entièrement déterminé par ses deux premiers termes. En déduire que les suites s et l dont les premiers termes sont $s_0=1$, $s_1=0$, $l_0=0$, $l_1=1$ forment une famille génératrice de S.
3) Montrer que $\{s,l\}$ est une base de S.
4) Montrer que les suites u,v de S définies par $u_0=u_1=1$, $v_0=2$, $v_1=1$ forment une base de S.
5) On cherche des éléments de S de la forme $(u_n)_n=(r^n)_n$ pour $r\in\mathbb{R}$. Quelle équation doit vérifier r dans ce cas ?
6) Donner une base de S formée de deux suites géométriques.
7) En déduire la forme générale des éléments de S.
Solution : 1) On montre que S est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans S, montrons par récurrence (à deux pas) sur n, que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad x_n=x_0s_n+x_1l_n\,.$$

Supposons, pour un $n\in\mathbb{N}$ fixé, que $x_n=x_0s_n+x_1l_n$ et $x_{n+1}=x_0s_{n+1}+x_1l_{n+1}$ et calculons $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n=\cdots=x_0s_{n+2}+x_1l_{n+2}$.
Ceci montre que $\{s,l\}$ engendre S.
3) La liberté de $\{s,l\}$ se montre sans peine qui est donc une base de S.
4) Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S forment une famille libre, et donc une base de S qui est de dimension 2 d'après le 3).
5) (Suites géométriques de S)
Soit $r\in\mathbb{R}$, la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans S ssi

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad r^{n+2}=r^{n+1}+r^n\,.$$

c'est-à-dire ssi

$$r^2-r-1=0\,.$$

Cette équation admet deux solutions réelles :

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\qquad\text{et}\qquad\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

6) $\{((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n)_{n\in\mathbb{N}},((\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ est une base de S.
7) D'après 6), pour tout élément $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S, il existe $\lambda_1\in\mathbb{R}$ et $\lambda_2\in\mathbb{R}$ tels que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad x_n=\lambda_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\lambda_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\,.$$

On trouve λ_1 et λ_2 à partir du système d'équations

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_1 + \lambda_2, \\ x_1 = \lambda_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + \lambda_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) \, . \end{cases}$$

Par exemple, la célèbre suite de Fibonacci est la suite de S telle que $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, on obtient

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \, .$$