UNIVERSITÉ D'ANGERS **Licence MPCIE S3 – Double licence Math-Éco S3**
Algèbre linéaire 1 **2020 – 2021**

Feuille d'exercices n° 3

Solutions

Exercice 1 – Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Lorsqu'elles le sont, déterminer leur noyau et image.

1) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$. 2) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (2x+3y,x)$. 3) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (y, x+y-\sqrt{x^2})$.

4) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x-y,xy)$. 5) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x-y, y+x, \sin(z))$.

6) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x,y+x,z)$. 7) $\mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(7)$.

8) $\mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P - XP'$. 9) $\mathbb{R}_5[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto PP'$.

10) $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $x(t) \mapsto (t^2+1)x(t)$. 11) $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $x(t) \mapsto |x(t)|$.

12) $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $x(t) \mapsto \int_0^1 x(t)\,dt$.

Solution :

1) L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ n'est pas linéaire.
En effet, en posant $x = 1$ et $\lambda = 2$ on obtient $f(\lambda x) = 8$ mais $\lambda f(x) = 2$.

2) L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (2x+3y,x)$ est linéaire puisque ses deux composantes $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 2x+3y$ et $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x$ sont des formes linéaires (car combinaisons linéaires de formes coordonnées).
Calculons son noyau.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \in \mathrm{Ker}(f)$ si, et seulement si, $f(x,y) = (0,0)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $2x+3y = 0$ et $x = 0$ donc si, et seulement si, $x = y = 0$. On a donc $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0)\}$ et f est injective.
Calculons son image.
On a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1,0), f(0,1)) = \mathrm{Vect}((2,1),(3,0)) = \mathbb{R}^2$ puisque les vecteurs $(2,1)$ et $(3,0)$ ne sont pas colinéaires. En particulier f est surjective.
Remarque : on aurait pu aussi utiliser le théorème du rang dont un corollaire est que tout endomorphisme injectif (ce qui est le cas de f) est un isomorphisme.

3) L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (y, x+y-\sqrt{x^2})$ n'est pas linéaire. En effet, sa seconde composante $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+y-\sqrt{x^2}$ ne l'est pas car si $(x,y) = (1,0)$ et $\lambda = -1$ on obtient $f_2(\lambda x, \lambda y) = -2$ mais $\lambda f(x,y) = 0$.

4) L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x-y,xy)$ n'est pas linéaire. En effet, sa seconde composante $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$ ne l'est pas car si $(x,y) = (1,1)$ et $\lambda = -1$ on obtient $f_2(\lambda x, \lambda y) = 1$ mais $\lambda f(x,y) = -1$.

5) L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x-y, y+x, \sin(z))$ n'est pas linéaire. En effet, sa troisième composante $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto \sin(z)$ ne l'est pas car si $(x,y,z) = (0,0,\frac{\pi}{2})$ et $\lambda = 2$ on obtient $f_3(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = 0$ mais $\lambda f(x,y,z) = 2$.

6) L'application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x,y+x,z)$ est linéaire. En effet, ses trois composantes $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto x$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto y+x$ et $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto z$ sont des formes linéaires car combinaisons linéaires de formes coordonnées.
Calculons son noyau.
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f)$ si, et seulement si, $f(x,y,z) = (0,0,0)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $x = 0$, $y+x = 0$ et $z = 0$ donc si, et seulement si, $x = y = z = 0$. On a donc $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}$ et f est injective.
D'après le théorème du rang, elle est donc surjective aussi car son espace de départ est égal à son espace d'arrivée (f est un endomorphisme). On a donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

7) L'application $f\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(7)$ est linéaire. En effet, soient $P,Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(7) = \lambda P(7) + \mu Q(7) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.
Calculons son noyau.
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$P \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow P(7) = 0$$

Autrement dit, $\mathrm{Ker}(f) = \{P \in \mathbb{R}_2[X] | P(7) = 0\}$. Un tel polynôme $P \in \mathrm{Ker}(f)$ se factorise par $X-7$. Ainsi la famille $\{X-7, (X-7)X\}$ est bien dans le noyau, libre en raisonnant sur le degré et génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$. C'est donc une base. Comme $\mathrm{Ker}(f)$ n'est pas réduit au vecteur nul, f n'est pas injective.
On calcule la dimension de l'image de f avec le théorème du rang : $\dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rg}(f) = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim \mathrm{Ker}(f) = 3-2 = 1$. On en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ et que f est surjective.

8) L'application $f\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P - XP'$ est linéaire. En effet soient $P,Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P(X) + \mu Q(X)) - X(\lambda P(X) + \mu Q(X))' = \lambda P(X) + \mu Q(X) - X(\lambda P'(X) + \mu Q'(X)) = \lambda(P(X) - XP'(X)) + \mu(Q(X) - XQ'(X)) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.
Calculons son noyau.
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P \in \mathrm{Ker}(f)$ si, et seulement si, $f(P)$ est égal au polynôme nul. Écrivons $P(X) = a + bX + cX^2$, on a alors $f(P) = a + bX + cX^2 - X(b+2cX) = a - cX$. De là, $f(P)$ est égal au polynôme nul si, et seulement si, $a = 0$ et $c = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $P(X) = bX$ donc le noyau est la droite vectorielle engendrée par le polynôme X. Une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est donc $\{X\}$.
On peut encore utiliser le théorème du rang ici car l'espace de départ est de dimension finie. On obtient $\dim \mathrm{Im}(f) = 3-1 = 2$. L'image de f est donc un plan vectoriel dont nous allons déterminer une base. Nous pouvons d'ores et déjà en déduire que f n'est pas surjective puisque l'espace d'arrivée n'est pas de dimension 2.
Calculons l'image de f.
On a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) = \mathrm{Vect}(1, 0, -X^2)$. Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est donc $\{1, X^2\}$.

9) L'application $f\colon \mathbb{R}_5[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto PP'$ n'est pas linéaire. En effet, si $P(X) = X$ et $\lambda = 2$, on a $f(\lambda P) = 4X$ mais $\lambda f(P) = 2X$.

10) L'application $f\colon \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $x(t) \mapsto (t^2+1)x(t)$ est linéaire. En effet, soient $x,y \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions et $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, alors pour $t \in \mathbb{R}$, on a $f(\lambda x(t) + \mu y(t)) = (t^2+1)(\lambda x(t) + \mu y(t)) = \lambda(t^2+1)x(t) + \mu(t^2+1)y(t) = \lambda f(x(t)) + \mu f(y(t))$.
Le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ est réduit à l'application nulle. On en déduit que f est injective.
On ne peut pas utiliser le théorème du rang ici car l'espace $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie.

On ne peut pas non plus considérer l'image des vecteurs d'une base car nous ne disposons pas d'une base explicite de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$! On en revient donc à la définition de l'espace image. Soit $y \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction, on cherche s'il existe un antécédent de y par f, c'est-à-dire qu'on cherche une fonction $x \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $(t^2+1)x(t) = y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme t^2+1 ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, la fonction $x\colon t \mapsto \frac{y(t)}{t^2+1}$ est bien définie et on a $f(x) = y$. Comme tout élément de l'espace d'arrivée $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admet un antécédent, on a $\mathrm{Im}(f) = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et l'application f est surjective.
En conclusion, f est linéaire, injective et surjective, c'est donc un isomorphisme.

11) L'application $f\colon \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $x(t) \mapsto |x(t)|$ n'est pas linéaire. En effet, si x est la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t$ et $\lambda = -1$, on a pour $t \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x(t)) = t$ et $\lambda f(t) = -t$, mais $t \neq -t$ dès que $t \neq 0$.

12) L'application $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $x(t) \mapsto \int_0^1 x(t)\,dt$ est linéaire car pour deux fonctions $x, y \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ on a $\int_0^1 \big(x(t)+y(t)\big)\,dt = \int_0^1 x(t)\,dt + \int_0^1 y(t)\,dt$ et pour une fonction $x \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\int_0^1 (\lambda x(t))\,dt = \lambda \int_0^1 x(t)\,dt$.
Le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ contient, par exemple, toutes les fonctions $x \mapsto \lambda(x-1/2), \forall \lambda \in \mathbb{R}$. On en déduit que f n'est pas injective.
En revanche l'application f est surjective, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. En effet, soit $a \in \mathbb{R}$, alors $x\colon t \mapsto 2at$ est un antécédent de a par f puisque $\int_0^1 2at\,dt = [at^2]_0^1 = a$.

Exercice 2 – On note $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Existe-t-il un endomorphisme $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant les conditions suivantes :
1) $g(e_1) = e_2 + e_3$, $g(e_2) = e_1$, $g(e_3) = e_2 - e_3$.
2) $g(e_1 + e_2) = e_3$, $g(e_2 + e_3) = e_1$, $g(e_3 - e_1) = e_2$.
3) $g(e_1 + e_2) = e_3$, $g(e_3) = e_2 - e_3$.
4) Dans 1), 2) et 3), si g existe, est-il unique ? Si oui, calculer $g(x,y,z)$.
Solution : On rappelle qu'une application linéaire est déterminée par l'image des vecteurs d'une base.
1) Il existe donc bien une application linéaire $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $g(e_1) = e_2 + e_3$, $g(e_2) = e_1$ et $g(e_3) = e_2 - e_3$.

2) Il n'existe aucune application linéaire $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $g(e_1+e_2) = e_3$, $g(e_2+e_3) = e_1$ et $g(e_3-e_1) = e_2$.
En effet, si une telle application existait, on aurait alors par linéarité : $g(e_1) + g(e_2) = e_3$ et $g(e_3) - g(e_1) = e_2$ d'où

$$g(e_2) + g(e_3) = g(e_1) + g(e_2) + g(e_3) - g(e_1) = e_3 + e_2$$

ce qui contredirait $g(e_2) + g(e_3) = e_1$.

3) L'image de e_3, $g(e_3) = e_2 - e_3$, est déjà déterminée. Il reste à donner les images de e_1 et de e_2. Pour respecter $g(e_1+e_2) = e_3$, il faut et il suffit que $g(e_1) + g(e_2) = e_3$. Donc pour un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ quelconque, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ déterminé par $g(e_1) = u$, $g(e_2) = e_3 - u$ et $g(e_3) = e_2 - e_3$ répond à la question.

4) Pour la question 1) Du fait qu'on a donné l'image de tous les vecteurs d'une base, l'application ainsi déterminée est unique. Pour $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on peut écrire par linéarité de g :
$g(u) = g(x,y,z) = g(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xg(e_1) + yg(e_2) + zg(e_3)$. Donc $g(x,y,z) = x(e_2+e_3) + ye_1 + z(e_2-e_3) = ye_1 + (x+z)e_2 + (x-z)e_3 = (y, x+z, x-z)$.
Pour la question 3) On a vu qu'il y a plusieurs réponses possibles pour g.

Exercice 3 – Soit $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z,t) = (x+2y+3z+t, x+3y+4z, 2x+5y+7z+t)$.

1) Montrer que f est linéaire.

2) Donner des équations en nombre minimal de $\operatorname{Ker} f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

3) Donner une base de $\operatorname{Ker} f$.

4) Quel est le rang de f ?

5) Compléter la base de $\operatorname{Ker} f$ trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.

6) f est-elle injective ? surjective ?

7) Donner une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$, et en extraire une base de $\operatorname{Im} f$.

8) Donner des équations en nombre minimal de $\operatorname{Im} f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Solution : 1) L'application f est linéaire. En effet, ses trois composantes $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z,t) \mapsto x+2y+3z+t$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z,t) \mapsto x+3y+4z$ et $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z,t) \mapsto 2x+5y+7z+t$ sont des formes linéaires car combinaisons linéaires de formes coordonnées.

2) Un vecteur $u = (x,y,z,t)$ de $\mathbb{R}^4$ appartient au noyau de f si, et seulement si, $f(u) = (0,0,0)$ c'est-à-dire si, et seulement si, ses coordonnées (x,y,z,t) dans la base canonique vérifient le système

$$\begin{cases} t+\ x+2y+3z=0 & (\ell_1) \\ \quad\ x+3y+4z=0 & (\ell_2) \\ t+2x+5y+7z=0 & (\ell_3) \end{cases}$$

que l'on échelonne

$$\begin{cases} \ t+x+2y+3z\ \ \ =0 & (\ell_1) \\ -t\ \ +\ y+\ z\ \ \ =0 & (\ell_2-\ell_1) \\ \qquad\qquad\ \ 0=0 & (\ell_3-\ell_1-\ell_2) \end{cases}$$

Le noyau $\operatorname{Ker}(f)$ est donc déterminé par les équations en nombre minimal suivantes :

$$\begin{cases} \ t+x+2y+3z=0 \\ -t\ \ +\ y+\ z=0 \end{cases}$$

3) D'après la question précédente, le rang du système étant 2, on en déduit que $\dim \operatorname{Ker}(f) = 4-2 = 2$. Une base de $\operatorname{Ker} f$ sera donc formée de deux vecteurs. On commence par exprimer x et y en fonction de z et t :

$$\begin{cases} \ y=t\ \ \ -z \\ x\ \ =-t-2y-3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ y=t\ \ -z \\ x\ \ =-3t-z \end{cases}$$

On en déduit que $\operatorname{Ker}(f) = \{(-z-3t, -z+t, z, t); z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$. On a $(-z-3t,-z+t,z,t) = z(-1,-1,1,0) + t(-3,1,0,1)$ et de là, $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}((-1,-1,1,0),(-3,1,0,1))$. Comme les vecteurs $(-1,-1,1,0)$ et $(-3,1,0,1)$ ne sont pas colinéaires, la famille $\{(-1,-1,1,0),(-3,1,0,1)\}$ est une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

4) Comme l'espace de départ $\mathbb{R}^4$ est de dimension finie, on peut utiliser le théorème du rang :

$$\operatorname{rg}(f) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Ker}(f) = 4-2 = 2$$

5) On essaye de compléter la famille $\{(-1,-1,1,0),(-3,1,0,1)\}$ par des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. En utilisant les équations de $\operatorname{Ker}(f)$, il est immédiat de vérifier que $e_1 = (1,0,0,0) \notin \operatorname{Vect}((-1,-1,1,0),(-3,1,0,1)) = \operatorname{Ker}(f)$. On en déduit que $\{(-1,-1,1,0),(-3,1,0,1),e_1\}$ est

libre. On essaye de compléter avec e_2, c'est-à-dire que l'on se demande si $\{(-1,-1,1,0),(-3,1,0,1),e_1,e_2\}$ est libre (il ne suffit pas de vérifier que $e_2 \notin \mathrm{Ker}(f)$!

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

par permutations de colonnes on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est une famille échelonnée. On en déduit que $\{(-1,-1,1,0),(-3,1,0,1),e_1,e_2\}$ est libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4.

6) L'application linéaire f n'est pas injective puisque son noyau n'est pas trivial. Elle n'est pas surjective non plus car $\dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rg}(f) = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

7) Une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ est donnée par l'image des vecteurs d'une base de l'espace de départ. On a donc

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1),f(e_2),f(e_3),f(e_4)) = \mathrm{Vect}((1,1,2),(2,3,5),(3,4,7),(1,0,1)) .$$

Autrement dit la famille $\{(1,1,2),(2,3,5),(3,4,7),(1,0,1)\}$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Elle ne peut pas être libre car $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$. Pour extraire une base de cette famille, on utilise de nouveau que $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$. Il suffit donc de choisir deux vecteurs non colinéaires dans cette famille pour obtenir une base de $\mathrm{Im}(f)$. Par exemple $\{(1,1,2),(1,0,1)\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

8) Comme la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ vaut 2, il suffit d'une seule équation pour déterminer ce sous-espace de $\mathbb{R}^3$. Un vecteur $(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3$ appartient à $\mathrm{Vect}((1,1,2),(1,0,1))$ si, et seulement si, la famille ci-dessous est liée.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & X \\ 1 & 0 & Y \\ 2 & 1 & Z \end{pmatrix}$$

On échelonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & Y-X \\ 2 & -1 & Z-2X \\ & (c_2-c_1) & (c_3-Xc_1) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & Z-X-Y \\ & & (c_3+(Y-X)c_2) \end{pmatrix} .$$

La famille est donc liée si, et seulement si, $Z-X-Y=0$ qui est donc l'équation de $\mathrm{Im}(f)$:

$$\mathrm{Im}(f) = \{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \mid Z-X-Y=0\} .$$

Exercice 4 – Soient $E=\mathbb{R}^4$, $F=\mathbb{R}^5$, $\{e_1,\dots,e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $\{e'_1,\dots,e'_5\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. Construire, si cela est possible, une application linéaire $f\colon E \to F$ telle que

a) $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(e'_2, e'_4)$. b) $\mathrm{Im}\, f = \{0\}$.
c) $\mathrm{Im}\, f = F$. d) $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3, e_4)$ et $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(e'_2, e'_3)$.
Solution : a) L'application $f : (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (0,x,0,y,0) \in \mathbb{R}^5$ convient.

b) L'application $f : (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (0,0,0,0,0) \in \mathbb{R}^5$ convient.

c) Il n'en existe pas car $\dim(\mathbb{R}^5) > \dim(\mathbb{R}^4)$ et la dimension de l'image d'une application linéaire est nécessairement plus petit que l'espace vectoriel de départ (théorème du rang).

d) L'application $f : (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (0,x,y-z,0,0) \in \mathbb{R}^5$ convient. Voici une façon de la construire : on complète la base du noyau voulu $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3, e_4)$ en une base de $\mathbb{R}^4$. Ici, on peut prendre $\{e_2 + e_3, e_4, e_1, e_2)$. Et comme une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de l'espace de départ alors on pose $f(e_2 + e_3) = f(e_4) = 0$ et $f(e_1) = e'_2, f(e_2) = e'_3$. Ce qui nous permet d'obtenir l'expression donnée.

Exercice 5 – Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par $f(x,y,z) = (y-z, z+x-2y, -y+x, x-z)$.
1) Calculer le rang de f. L'application f est-elle surjective ? injective ?
2) Donner des équations en nombre minimal de $\mathrm{Im}\, f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
3) Donner des équations en nombre minimal de $\mathrm{Ker}\, f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4) Donner une base de $\mathrm{Ker}\, f$.
Solution :
1) Le rang de f est la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$. Autrement dit,

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Vect}((0,1,1,1),(1,-2,-1,0),(-1,1,0,-1)))$$

Pour calculer cela, on va échelonner la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour commencer, on va intervertir les deux premières colonnes pour avoir une valeur non nulle comme pivot :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ (C_1) & (C_2) & (C_3) \end{pmatrix}$$

Puis on échelonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ (C_1) & (C_2) & (C_3 + C_1) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (C_1) & (C_2) & (C_3 + C_2) \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\text{rg}(f) = 2$. Par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$. L'application f n'est donc ni injective ni surjective.

2) Dans la question précédente, on a montré que $\text{Im}(f)$ est engendré par les vecteurs $v_1 = (1,-2,-1,1)$ et $v_2 = (0,1,1,0)$. On en déduit que $v = (x,y,z,t) \in \text{Im}(f)$ si, et seulement si, (v_1, v_2, v) est liée. On va donc considérer la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -2 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \\ 0 & 1 & t \\ (C_1) & (C_1) & (C_3) \end{pmatrix}$$

puis voir quels conditions sur x,y,z,t doit-on mettre pour que la famille (v_1, v_2, v) soit liée. Pour cela, échelonnons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & y+2x \\ -1 & 1 & z+x \\ 0 & 1 & t \\ (C_1) & (C_2) & (C_3 - xC_1) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & z-y-x \\ 0 & 1 & t-y-2x \\ (C_1) & (C_2) & (C_3 - (y+2x)C_2) \end{pmatrix}$$

On en déduit que les équations de $\text{Im}(f)$ sont $\begin{cases} -x-y+z=0 \\ -2x-y+t=0 \end{cases}$ (qui sont en nombre minimal car $\text{Im}(f)$ est de dimension 2 dans $\mathbb{R}^4$)

3) Soit $v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$v \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} y-z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x-y=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=z \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$

La deuxième équation se déduit de la première donc $(x,y,z) \in \text{Ker}(f)$ si, et seulement si, $x = y$ et $y = z$ (ces équations sont en nombre minimal car $\text{Ker}(f)$ est de dimension 1 dans $\mathbb{R}^3$).

4) L'espace vectoriel $\text{Ker}(f)$ est de dimension 1 donc pour trouver une base, il suffit de donner un de ses éléments non nuls. Le vecteur $(1,1,1)$ fait l'affaire (comme nous le montre la question précédente).

Exercice 6 – Soit $f\colon \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X], \quad P \mapsto (X-1)P' - P$.
1) Montrer que f est linéaire.
2) Calculer $f(aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e)$. En déduire une base de $\text{Ker}\, f$.
3) L'équation $f(P) = Q$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{R}_4[X]$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_4[X]$?
4) Calculer $f((X-1)^k)$ pour $k = 0,1,2,3,4$. En déduire une caractérisation des polynômes Q pour lesquels $f(P) = Q$ a des solutions.
5) Résoudre $(X-1)P' - P = X^2 - 2X + 2$.

Solution : 1) Soient $P, Q \in \mathbb{R}_4[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(P+\lambda Q) &= (X-1)(P+\lambda Q)' - (P+\lambda Q) \\ &= (X-1)P' + \lambda(X-1)Q' - P - \lambda Q \quad \text{(par linéarité de la dérivée)} \\ &= f(P) + \lambda f(Q) \end{aligned}$$

L'application f est donc linéaire.

2) Soit $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \in \mathbb{R}_4[X]$. Alors,

$$\begin{aligned} f(P) = (X-1)P' - P &= (X-1)(4aX^3 + 3bX^2 + 2cX + d) - (aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e) \\ &= 3aX^4 + (2b-4a)X^3 + (c-3b)X^2 - 2cX - (d+e) \end{aligned}$$

Ainsi, $f(P) = 0$ si, et seulement si,,

$$\begin{cases} 3a & = 0 \\ -4a+2b & = 0 \\ -3b+c & = 0 \\ -2c & = 0 \\ -(d+e) & = 0 \end{cases}$$

ou encore si, et seulement si,

$$\begin{cases} a & = 0 \\ b & = 0 \\ c & = 0 \\ d+e & = 0 \end{cases}$$

Autrement dit, $f(P) = 0$ si, et seulement si, $P = X - 1$. On en déduit que $(X-1)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

3) L'équation (d'inconnue P) $f(P) = Q$ a une solution si, et seulement si, $Q \in \mathrm{Im}(f)$. De ce fait, l'équation $f(P) = Q$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{R}_4[X]$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_4[X]$ si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_4[X]$.
Or, grâce la question précédente et au théorème du rang, on remarque que

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}_4[X]) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 5 - 1 = 4 < \dim(\mathbb{R}_4[X])$$

et donc que $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}_4[X]$. Il existe donc des polynômes Q tels que $f(P) = Q$ n'a pas de solution.

4) $f((X-1)^0) = f(1) = -1$.
Soit $k \in \{1,2,3,4\}$. Alors,

$$f\left((X-1)^k\right) = (X-1) \times k(X-1)^{k-1} - (X-1)^{k-1} = (k-1)(X-1)^k$$

La famille de vecteurs $\{-1, (k-1)(X-1)^k | k = 2,3,4\}$ de $\mathrm{Im}(f)$ est libre (c.f. degré) et de cardinal $4 = \dim(\mathrm{Im}(f))$. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.
On en déduit que $f(P) = Q$ a une solution si, et seulement si, $Q \in \mathrm{Vect}(1, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4)$

5) Pour résoudre l'équation

$$(X-1)P' - P = X^2 - 2X + 2, \tag{1}$$

on peut remarquer que

$$X^2 - 2X + 2 = (X-1)^2 + 1 = f\left((X-1)^2\right) - f(1) = f\left((X-1)^2 - 1\right) = f(X^2 - 2X)$$

Le polynôme $X^2 - 2X$ est donc une solution de (**??**). Ainsi, l'ensemble des solutions de (**??**) est

$$X^2 - 2X + \mathrm{Ker}(f) = \{(X^2 - 2X + \lambda(X-1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 7 – Dans $\mathbb{R}^3$, soit D la droite vectorielle dirigée par $u = (1,2,3)$ et H le plan d'équation $3x+y-2z=0$.
1) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = H \oplus D$.
2) Déterminer les expressions analytiques de p la projection sur H de direction D, et de s la symétrie par rapport à H de direction D.
Solution :
1) Comme $u \notin H$ alors $H \cap D = 0$ et $H + D = \mathbb{R}^3$ car

$$\dim(H+D) = \dim(H) + \dim(D) - \dim(D \cap H) = 2 + 1 - 0 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

2) Calculons les projections de $\mathbb{R}^3$ sur H de direction D.
Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Et soit D_x la droite parallèle à D passant par x. La projection de x sur H de direction D correspond exctement à l'intersection de D_x et de H (qui est unique puisque $u \notin H$). Soit λ l'unique réel tel que $x - \lambda u \in D_x \cap H$.
Comme $x - \lambda u = (x_1 - \lambda, x_2 - 2\lambda, x_3 - 3\lambda) \in H$ alors

$$0 = 3(x_1 - \lambda) + x_2 - 2\lambda - 2(x_3 - 3\lambda) = 3x_1 + x_2 - 2x_3 + \lambda$$

Autrement dit, $\lambda = -3x_1 - x_2 + 2x_3$. On en déduit que la projection p_H sur H est donnée par

$$p_H(x) = x - (-3x_1 - x_2 + 2x_3)u = (4x_1 + x_2 - 2x_3, 6x_1 + 3x_2 - 4x_3, 9x_1 + 3x_2 - 5x_3)$$

et celle sur D est

$$p_D(x) = (-3x_1 - x_2 + 2x_3)u = (-3x_1 - x_2 + 2x_3, -6x_1 - 2x_2 + 4x_3, -9x_1 - 3x_2 + 6x_3)$$

La symétrie s par rapport à H de direction D est :

$$s(x) = p_H(x) - p_D(x) = (7x_1 + 2x_2 - 4x_3, 12x_1 + 5x_2 - 8x_3, 18x_1 + 6x_2 - 11x_3)$$

Exercice 8 – Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$
1) Donner une base de F.
2) Trouver deux applications linéaires distinctes de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^5$ ayant F comme noyau.
3) Existe-t-il une forme linéaire sur $\mathbb{R}^4$ ayant F comme noyau ?

Solution :

1) On échelonne le système

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ x_3+x_4=0 & (\ell_1)\\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4=0 & (\ell_2)\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+\ x_2+x_3+x_4=0 & (\ell_1)\\ \ -3x_2+x_3-x_4=0 & (\ell_2-2\ell_1)\end{cases}$$

On en déduit que les solutions de ce système sont paramétrées par x_3 et x_4 :

$$\begin{cases} x_1=-x_2-x_3-x_4=-\frac{1}{3}x_3+\frac{1}{3}x_4-x_3-x_4=-\frac{4}{3}x_3-\frac{2}{3}x_4\\ x_2=\frac{1}{3}x_3-\frac{1}{3}x_4\\ x_3=x_3\\ x_4=x_4\end{cases}$$

Autrement dit, F est engendré par les vecteurs $(-4/3,1/3,1,0)$ et $(-2/3,-1/3,0,1)$. Comme ces deux vecteurs sont libres alors ils forment une base de F (qui est donc de dimension 2).

2) Les applications

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4\mapsto(x_1+x_2+x_3+x_4,2x_1-x_2+3x_3+x_4,0,0,0)\in\mathbb{R}^5$$
$$\text{et } (x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4\mapsto(0,x_1+x_2+x_3+x_4,0,2x_1-x_2+3x_3+x_4,0)\in\mathbb{R}^5$$

ont F comme noyau (par définition de F).

3)Soit $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ une forme linéaire. Alors son image est soit 0 soit $\mathbb{R}$ (c.f. exercice 4 du TD1). Autrement dit,

$$\dim(\mathrm{Im}(f))\leqslant 1.$$

On peut maintenant utiliser le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f))=\dim(\mathbb{R}^4)-\dim(\mathrm{Im}(f))\geqslant 4-1=3$$

Ainsi, le noyau de f ne peut pas être égal à F qui est de dimension 2.

Exercice 9 – On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'une base orthonormée (e_1,e_2).
Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Donner les matrices dans la base canonique des endomorphismes suivants :
a) La rotation ρ d'angle θ.
b) La symétrie orthogonale σ par rapport à l'axe engendré par le vecteur $(\cos\theta,\sin\theta)$.

Solution :

1) En utilisant le cercle trigonométrique, on voit que $\rho(e_1)=(\cos(\theta),\sin(\theta))$ et $\rho(e_2)=(-\sin(\theta),\cos(\theta))$. On en déduit que la matrice de ρ dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

2) Les vecteurs $\rho(e_1)$ et $\rho(e_2)$ sont orthogonaux et $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\rho(e_1)\oplus\mathbb{R}\rho(e_2)$. Notons p_1 la projection sur $\mathbb{R}\rho(e_1)$ et p_2 la projection sur $\mathbb{R}\rho(e_2)$.

Soit $x = \lambda_1 \rho(e_1) + \lambda_2 \rho(e_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$\begin{cases} \langle x, \rho(e_1) \rangle = \lambda_1 \|\rho(e_1)\|^2 = \lambda_1 \\ \langle x, \rho(e_2) \rangle = \lambda_2 \|\rho(e_2)\|^2 = \lambda_2 \end{cases}$$

Donc, $p_1(x) = \langle x, \rho(e_1) \rangle \rho(e_1)$ et $p_2(x) = \langle x, \rho(e_2) \rangle \rho(e_2)$ Et donc la symétrie σ par rapport à $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= p_1(x) - p_2(x) = \langle x, \rho(e_1) \rangle \rho(e_1) - \langle x, \rho(e_2) \rangle \rho(e_2) \\ &= (x_1 \cos(\theta) + x_2 \sin(\theta))(\cos(\theta), \sin(\theta)) - (-x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta))(-\sin(\theta), \cos(\theta)) \\ &= (\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2, 2\cos(\theta)\sin(\theta))x_1 + (2\sin(\theta)\cos(\theta), \sin(\theta)^2 - \cos(\theta)^2)x_2 \\ &= (\cos(2\theta), \sin(2\theta))x_1 + (-\sin(2\theta), \cos(2\theta))x_2 \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice de σ est :

$$\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

Exercices subsidiaires

Exercice 10 – Soit E un espace vectoriel et soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer que

$$f(\operatorname{Ker} g \circ f) = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f.$$

Solution : Pour montrer cette égalité, on va procéder par double inclusion :
Soient $y \in f(\operatorname{Ker}(g \circ f))$ et $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$ tel que $y = f(x)$.
Alors, par définition, y est dans $\operatorname{Im}(f)$ et comme $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$

$$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = 0$$

c'est-à-dire $y \in \operatorname{Ker}(g)$. On a donc montré que $y \in \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)$. Par conséquent,

$$f(\operatorname{Ker} g \circ f) \subset \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f.$$

Réciproquement, soient $y \in \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)$ et $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors,

$$g \circ f(x) = g(y) = 0$$

Ce qui montre que $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et donc que $y \in f(\operatorname{Ker}(g \circ f))$. On a donc montré que

$$\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f) \subset f(\operatorname{Ker}(g \circ f))$$

Exercice 11 – Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Établir l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

1. f est une homothétie,
2. $\forall x \in E$, $f(x)$ est colinéaire à x.

Solution : Si E est de dimension 0 ou de dimension 1 alors le résultat est immédiat (par linéarité de f). Supposons donc que $\dim(E) \geqslant 2$.
Le premier point implique le second par définition. Montrons l'implication réciproque :
Supposons donc que pout tout $x \in E$, x et $f(x)$ soient colinéaires.
Soient $x, y \in E$ non nuls et non colinéaires. Alors x et $f(x)$ sont colinéaires i.e il existe λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$ (idem pour y, $f(y) = \lambda_y y$ et pour $x+y$, $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$) Par linéarité de f, on obtient :

$$\lambda_{x+y}x + \lambda_y y = \lambda_{x+y}(x+y) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

Comme x et y forment une famille libre alors $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$. Ainsi, le coefficient de proportionalité entre x et $f(x)$ ne dépend pas de x et donc f est une homothétie.

Exercice 12 – Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. A quelle condition nécessaire et suffisante sur F et G existe-t-il un endomorphisme u de E tel que $\operatorname{Ker} u = F$ et $\operatorname{Im} u = G$?
Solution : La condition nécessaire et suffisante est $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
En effet, s'il existe un endomorphisme u de E tel que $\operatorname{Ker}(f) = F$ et $\operatorname{Im}(f) = G$. Alors, par le théorème du rang,

$$\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(F) + \dim(G)$$

Réciproquement, supposons $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
Soit $\mathscr{B} = \{w_1, \ldots, w_{\dim(F)}\}$ une base de F.
Par le théorème de la base incomplète, il existe une famille $v_1, \ldots, v_k \in E$ tel que

$$E = \operatorname{Vect}(F, v_1, \ldots, v_k)$$

et tel que $k = \dim(E) - \dim(F) = \dim(G)$.
Soit $\mathscr{B}' = \{v'_1, \ldots, v'_{\dim(G)}\}$ une base de G et u l'endomorphisme défini par :

$$\begin{cases} u(w_i) = 0 & \text{pour tout } i \in \{1, \ldots, \dim(F)\} \\ u(v_i) = v'_i & \text{pour tout } i \in \{1, \ldots, \dim(G)\} \end{cases}$$

Cet endomorphisme est bien défini car $\{w_1, \ldots, w_{\dim(F)}, v_1, \ldots, v_k\}$ est une base de E et vérifie les conditions $\operatorname{Ker}(f) = F$ et $\operatorname{Im}(f) = G$ par construction.

Exercice 13 – Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^{n+1} = 0$. Montrer que $u^n = 0$. [Indication : prendre x tel que $u^n(x) \neq 0$ et regarder la famille $(x, u(x), \ldots, u^n(x))$.]
Solution : On va utiliser l'indication : supposons, par l'absurde, qu'il existe $x \in E$ tel que $u^n(x) \neq 0$ (en particulier, $u^m(x) \neq 0$ pour $m < n$). La famille $\{x, u(x), \ldots, u^n(x)\}$ est liée car de cardinal $n+1 > \dim(E)$. Il existe donc $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que

$$\lambda_0 x + \ldots + \lambda_n u^n(x) = 0$$

Soit λ_{k_0} le plus petit coefficient λ_* non nul. Alors, comme $u^{n+1} = 0$, on obtient

$$0 = u^{n-k_0}(0) = u^{n-k_0}\left(\lambda_0 x + \ldots + \lambda_n u^n(x)\right) = \lambda_{k_0} u^n(x)$$

Par hypothèse, $u_n(x) \neq 0$. On en déduit que $\lambda_{k_0} = 0$, ce qui contredit la définition de k_0.
On en déduit que $u^n = 0$