Arithmétique des polynômes

Feuille bonus

Exercice 1. Le but de cet exercice est de montrer le théorème de d'Alembert-Gauß : tout polynôme complexe non-constant a une racine.
Les définitions et les résultats autour des limites dans $\mathbb{R}$ se prolonge à $\mathbb{C}$ en remplaçant la valeur absolue par le module.
Soit P polynôme complexe non-constant.

1. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tel que
$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| > M \Rightarrow |P(z)| > |P(0)| + 1$$
2. Montrer que $z \mapsto P(z)$ est une fonction continue $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
3. On admet qu'une fonction continue sur la boule $\overline{B}(0, M) \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq M\}$ (et à valeurs dans $\mathbb{R}$) atteint sa borne inférieure en un point $z_0 \in \overline{B}(0, M)$. Montrer que
$$\inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| = \inf_{z \in \overline{B}(0,M)} |P(z)| = |P(z_0)|.$$
On veut maintenant montrer (par l'absurde) que $P(z_0) = 0$. Supposons donc que $P(z_0) \neq 0$. Considérons le polynôme $P(z_0 + X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ $(b_0 \neq 0)$.
4. Soient $k \in \{1, \ldots, n\}$ le plus petit indice non nul tel que $b_k \neq 0$ et ω une racine $k$ème de $\frac{-b_0}{b_k}$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$,
$$P(z_0 + \omega t) = b_0(1 - t^k + t^k \varepsilon(t))$$
où ε est une fonction tendant vers 0 quand t tend vers 0.
5. Montrer qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que
$$|t| < \alpha \Rightarrow |\varepsilon(t)| < 1$$
Utiliser la question précédente avec $|t| < \min(1, \alpha)$ pour en déduire une contradiction et conclure.