L3 M - L3 MA - DL3 ME - DL2 MI
2025-2026

Analyse numérique

Feuille 0 : Convexité

1 Exemples de fonctions convexes

Exercice 1. Montrer que $x \in \mathbb{R} \mapsto |x| \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ sont des fonctions convexes.

Exercice 2. Déterminer les fonctions polynomiales de degré impair qui sont convexes.

Exercice 3 (Composée de fonctions convexes)**.** Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes. Supposons la fonction g croissante. Démontrer que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 4 (Minimum et maximum)**.** Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes, avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

1. Montrer que $\max(f, g)$ est convexe.
2. La fonction $\min(f, g)$ est-elle toujours convexe ?

Exercice 5. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue convexe et strictement croissante, avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Montrer que $f^{-1} : f(I) \to I$ est concave.

Exercice 6. Le but de cet exercice est d'illustrer que la condition sur les cordes d'une fonction convexe se comporte mieux par passage à la limite que la condition de positivité de sa dérivée seconde (si elle existe).

Soit I un segment. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit (f_n) une suite de fonctions $I \to \mathbb{R}$ convergeant simplement vers f.

1. Donner un exemple où les f_n sont continues et leur limite f n'est pas continue.
2. Supposons que les fonctions f_n soient de classe $\mathcal{C}^2$, que la suite (f_n') converge simplement vers une fonction g_1 et que (f_n'') converge uniformément vers une fonction g_2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$, et que $f' = g_1$ et $f'' = g_2$. En déduire alors que si les f_n sont convexes alors f est aussi convexe.
3. Donner une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ convergeant simplement vers la fonction valeur absolue sur $[-1, 1]$.
4. Supposons que les f_n soient convexes. Montrer que la fonction f est convexe.

2 Inégalités de convexité

Exercice 7. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Démontrer que f est continue sur I. Le résultat subsiste-t-il si I n'est plus supposé ouvert ?

Exercice 8. Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que si f admet un minimum local en $a \in I$ alors f admet un minimum global en a.
2. Montrer que si f est strictement convexe alors le minimum global de f (s'il existe) est atteint en un unique point.
3. Supposons que f est dérivable en $a \in I$ et que $f'(a) = 0$. Montrer que a est un minimum global de f.

Exercice 9. Montrer que :

$$\forall x \in [0, \pi/2],\ \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

Exercice 10 (Inégalité de Bernoulli)**.** Soit $n \geq 2$.

1. Étudier la convexité de la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) := (1+x)^n$.
2. En déduire que, pour tout $x \geq -1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 11 (Inégalité de Jensen)**.** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient $x_1, \ldots, x_n \in I$ et $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Montrer que

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$$

Exercice 12 (Inégalité arithmético-géométrique)**.** Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs. Montrer l'inégalité suivante :

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Les deux exercices suivants sont écrits dans le contexte de l'intégration des fonctions continues sur un segment. Il existe évidemment des versions plus générales pour des fonctions intégrables sur un espace mesuré ayant une mesure finie.

Exercice 13 (Inégalité de Jensen intégrale)**.** Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et convexe. Montrer que

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(t))\ \mathrm{d}t.$$

Exercice 14. Soient $p, q, r \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Montrer que

$$\left(\int_a^b |f(x)g(x)|^r\ \mathrm{d}x\right)^{1/r} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\ \mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(x)|^q\ \mathrm{d}x\right)^{1/q}$$