Méthode de Gauß

Antoine Boivin

Posons $I \coloneqq]-1,1[$, $\omega : I \to \mathbb{R}_{>0}$ tel que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\omega(x)\ \mathrm{d}x < \infty$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.

Pour toute paire de polynômes (P,Q), on définit $\langle P,Q\rangle_\omega \coloneqq \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\omega(x)\mathrm{d}x$

Lemme 1. *$\langle\cdot,\cdot\rangle_\omega$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(P_0,\cdots,P_n)$ la base obtenue par orthogonalisation pour $\langle\cdot,\cdot\rangle_\omega$ de la base $(1,\ldots,X^n)$ de $\mathbb{R}_{\leq n}[X]$.

Lemme 2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme P_n a n racines distinctes.*

Démonstration. Soit $\rho \coloneqq \{\alpha \in]-1,1[\mid \alpha \text{ racine d'ordre impaire de } P\}$. Posons $R_n \coloneqq \prod_{\alpha\in\rho}(X-\alpha)$. Le polynôme P_n s'écrit comme un produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$:

$$P_n = \mathrm{cd}(P_n)\prod_{\alpha\in\rho}(X-\alpha)^{2\nu_\alpha+1}\prod_{\beta}(X-\beta)^{2\nu_\beta+1}\prod_{\gamma}(X-\gamma)^{2\nu_\gamma}\prod_{i}(X^2+b_iX+c_i)^{\nu_i}$$

On en déduit donc que $R_nP_n(x)$ est de signe constant pour $x \in]-1,1[$ car $\prod_{\alpha\in\rho}(X-\alpha)^{2\nu_\alpha+2}\prod_\gamma(x-\gamma)^{2\nu_\gamma}\prod_i(x^2+b_ix+c_i)^{\nu_i} \geq 0$ pour tout x et $\prod_\beta(x-\beta)^{2\nu_\beta+1}$ ne change pas de signe (car ne s'annule pas) sur $]-1,1[$.
En particulier,

$$\langle R_n, P_n\rangle_\omega = \int_{-1}^{1} R_n(t)P_n(t)\omega(t)\ \mathrm{d}t \neq 0$$

On en déduit donc que $R_n \notin P_n^\perp = \mathbb{R}_{\leq n-1}[X]$ et donc $\mathrm{Card}(\rho) = \deg(R_n) = n$. Comme $\deg(P_n) = n$, P_n n'a pas d'autres racines que celle dans ρ. □

Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ les racines de P_n. Soient $(L_1,\ldots,L_n)$ la base de Lagrange associée. Posons

$$\lambda_i \coloneqq \int_{-1}^{1} L_i(t)\omega(t)\ \mathrm{d}t.$$

Proposition 3. *Pour tout polynôme P de degré au plus $2n-1$, on a :*

$$\int_{-1}^{1} P(t)\omega(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i P(\alpha_i).$$

Démonstration.

— **Cas** $\deg(P) \leq n-1$ **:** La fonction $\varphi\colon P \in \mathbb{R}_{\leq n-1}[X] \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)\omega(t)\ \mathrm{d}t$ est une forme linéaire. Comme $(\mathrm{ev}_{\alpha_1},\ldots,\mathrm{ev}_{\alpha_m})$ est une base de $(\mathbb{R}_{\leq n-1})^*$ (car $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ sont distincts) alors il existe un unique n-uplet $(\beta_1,\ldots,\beta_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n}\beta_i\mathrm{ev}_{\alpha_i}.$$

Pour $j \in \{1,\ldots,n\}$, on a alors :

$$\lambda_j = \varphi(L_j) = \sum_{i=1}^{n}\beta_i\mathrm{ev}_{\alpha_i}(L_j) = \beta_j.$$

et donc pour P de degré au plus $n-1$, on a :

$$\varphi(P) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(\alpha_i).$$

— **Cas** $\deg(P) = n$ **:** Comme $1 \in P_n^{\perp}$

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)\omega(t) = \langle 1, P_n \rangle_\omega = 0$$

Comme $(1, \ldots, X^{n-1}, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{\leq n}[X]$, on est ramené au cas précédent.

— **Cas** $\deg(P) \leq 2n-1$ Soit P un polynôme (non nul) de degré au plus $2n-1$. On peut faire la division euclidienne de P par P_n : $P = Q_n P_n + R_n$ avec $\deg(R_n), \deg(Q_n) \leq n-1$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P(t)\omega(t)\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{1} (Q_n(t)P_n(t) + R_n(t))\omega(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} (Q_n(t)P_n(t) + R_n(t))\omega(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} Q_n(t)P_n(t)\omega(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} R_n(t)\omega(t)\mathrm{d}t = \langle Q_n, P_n \rangle_\omega + \int_{-1}^{1} R_n(t)\omega(t)\mathrm{d}t \\
&\overset{Q_n \in P_n^{\perp}}{=} \int_{-1}^{1} R_n(t)\omega(t)\mathrm{d}t \overset{\deg(R_n) \leq n-1}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i R_n(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (P(\alpha_i) - \underbrace{P_n(\alpha_i)}_{=0} Q_n(\alpha_i)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(\alpha_i)
\end{aligned}$$

□

Notation 4. Pour f une fonction continue, on note

$$I(f) \coloneqq \int_{-1}^{1} f(t) \mathrm{~d}t.$$

et

$$S_n(f) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\alpha_i)$$

Lemme 5. *Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda_i > 0$.*

Démonstration. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. On a :

$$0 < \langle L_i, L_i \rangle_\omega = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i^2(\alpha_i) = \lambda_i.$$

□

Proposition 6. *Soient $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{2n}$. Alors*

$$|I(f) - S_n(f)| \leq \frac{2\|X^n\|_\omega^2 \sup_{x \in]-1,1[} |f^{(2n)}(x)|}{(2n)!}.$$

Démonstration. Pour tout $x \in [-1, 1]$, le théorème des accroissements finis fournit $c(x) \in]-1, 1[$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(c(x)).$$

Notons $T_n \colon x \mapsto \sum_{k=0}^{2n-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}$ et $u \colon x \mapsto \frac{x^{2n}}{(2n)} f^{(2n)}(c(x))$. Comme T_n est une fonction polynomiale de degré au plus $2n-1$ alors

$$|I(f) - S_n(f)| = |I(T_n) + I(u) - S_n(T_n) - S_n(u)| = |I(u) - S_n(u)| \leq |I(u)| + |S_n(u)|.$$

On a :

$$\begin{aligned}|I(u)| &= \left|\int_{-1}^{1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(c(x))\omega(x)\ \mathrm{d}x\right| \leq \int_{-1}^{1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} |f^{(2n)}(c(x))|\omega(x)\ \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{\sup_{x\in]-1,1[} |f^{(2n)}(x)|}{(2n)!} \int_{-1}^{1} x^{2n}\omega(x)\ \mathrm{d}x = \frac{\sup_{x\in]-1,1[} |f^{(2n)}(x)|}{(2n)!} \|X^n\|_\omega^2.\end{aligned}$$

et

$$|S_n(u)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(\alpha_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\underbrace{\lambda_i}_{>0}|u(\alpha_i) \quad \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sup_{x\in]-1,1[} |f^{(2n)}(x)| \frac{\alpha_i^n}{(2n)!} = \frac{\sup_{x\in]-1,1[} |f^{(2n)}(x)|}{(2n)!} S_n(x \mapsto x^{2n}).$$

Considérons la division euclidienne $X^{2n} = P_n Q + R$ et donc

$$\begin{aligned}S_n(x \mapsto x^{2n}) &= S_n(x \mapsto P_n(x)Q(x)) + S_n(x \mapsto R(x)) = S_n(x \mapsto R(x)) = I(x \mapsto R(x)) \\ &= I(x \mapsto x^{2n}) - I(x \mapsto P_n(x)Q(x)).\end{aligned}$$

Comme $\deg(Q) = n$ alors la division euclidienne de Q par P_n s'écrit : $Q = \frac{\mathrm{cd}(Q)}{\mathrm{cd}(P_n)} P_n + S = \frac{1}{\mathrm{cd}(P_n)^2} P_n + S$ avec $\deg(S) \leq n-1$ et donc

$$I(x \mapsto P_n(x)Q(x)) = \frac{1}{\mathrm{cd}(P_n)^2} \left(I(x \mapsto P_n^2(x)) + I(x \mapsto SP_n(x))\right) = \frac{1}{\mathrm{cd}(P_n)^2} I(x \mapsto P_n^2(x)) > 0$$

On en déduit donc que

$$|S_n(u)| \leq \frac{\sup_{x\in]-1,1[} |f^{(2n)}(x)|}{(2n)!} I_n(x \mapsto x^{2n}) = \frac{\sup_{x\in]-1,1[} |f^{(2n)}(x)|}{(2n)!} \|X^n\|_\omega^2.$$

$\square$