

Analyse numérique

Feuille TD4 : Résolution numérique d'équations différentielles ordinaires

Exercice 1 (Ecriture d'un schéma d'Euler dans un cas simple). Donner une écriture simple du schéma d'Euler du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Exercice 2 (Exemples d'approximation numérique). Ecrire un algorithme fournissant une solution approchée en $t = 1$ pour les problèmes de Cauchy suivants :

- $$\begin{cases} y' = t^2 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} y' = \sin(t) + \cos(y) \\ y(0) = \pi \end{cases}$$
- $$\begin{cases} \exp(y') = 1 + t^4 + y^2 \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$

Exercice 3. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = ty \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

- Démontrer que pour tout $T > 0$, ce problème admet une unique solution sur $[0, T]$, et indiquer comment la méthode d'Euler permet d'en trouver une approximation.
- Déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$y(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=0}^{N-1} \left(1 + \frac{nt^2}{N^2} \right)$$

- Pour $\alpha > 0$, étudier les variations de la fonction $x \mapsto x \ln(1 + \alpha/x)$ sur $]0, +\infty[$; on montrera que $f''(x) < 0$. En déduire que

$$\forall N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall n \in \{0, \dots, N-1\}, \forall t \in \mathbb{R}, \left(1 + \frac{t^2}{N} \right)^{\frac{n}{N}} \leq 1 + \frac{nt^2}{N^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{N^2} \right)^n$$

- Calculer la limite de la question 2, et en déduire y .

Exercice 4 (Comparaison du schéma d'Euler et de la méthode du point médian). On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2ty \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On souhaite connaître la valeur de la solution y en $x = 1$.

1. Quelle est la solution de ce problème ?
2. Résoudre numériquement le problème avec la méthode d'Euler et la méthode du point médian, d'abord pour $N = 2$ itérations, puis pour $N = 3$ itérations.
3. Comparer les erreurs commises par ces deux méthodes.

Exercice 5. On étudie la méthode d'Euler implicite donnée par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$$

avec $h > 0$.

1. Supposons que f est une fonction L -lipschitzienne sur la seconde variable.
 - (a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, t \in \mathbb{R}$. Montrer que $y \mapsto a + hf(t, y)$ est hL -lipschitzienne.
 - (b) En déduire que si $hL < 1$ alors la suite (y_n) est bien définie.
2. Soit $\lambda > 0$. Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- (a) Résoudre cette équation différentielle.
 - (b) Construire la suite définie par le schéma d'Euler implicite. Étudier la limite de cette suite en fonction du pas h et λ .
 - (c) Comparer ce résultat avec la suite définie par le schéma d'Euler explicite.
3. Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = -ty^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

On souhaite connaître la valeur de la solution y en $x = 1$.

- (a) Résoudre cette équation différentielle.
- (b) Résoudre numériquement le problème avec la méthode d'Euler implicite d'abord pour $N = 2$ itérations, puis pour $N = 3$ itérations.

Exercice 6. On étudie la méthode numérique (M) de résolution de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ définie par :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n)$$

où

$$\Phi(t, y, h) = \alpha f(t, y) + \beta f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)\right) + \gamma f(t + h, y + hf(t, y))$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$.

1. Pour quelles valeurs du triplet (α, β, γ) retrouve-t-on
 - la méthode d'Euler ?
 - la méthode du point milieu ?
2. Dans cette question et la suivante, on supposera que la fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}$, et k -lipschitzienne en y . Pour quelles valeurs de (α, β, γ) la méthode proposée est-elle stable ?
3. Quelles relations doivent satisfaire (α, β, γ) pour que la méthode soit consistante ? convergente ? d'ordre au moins 1 ? d'ordre au moins 2 ? La méthode (M) peut-elle être d'ordre supérieur ?

Exercice 7. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \cos(t) \exp(-2y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Quelle est la solution de ce problème ?

2. Résoudre numériquement le problème avec la méthode d'Euler et de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, d'abord pour $N = 2$ itérations, puis pour $N = 3$ itérations.
3. Comparer les erreurs commises par ces deux méthodes.

Exercice 8. On considère une méthode à un pas de la forme

$$(M) \quad y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n)$$

qu'on suppose être d'ordre p . On se donne par ailleurs une méthode d'intégration approchée

$$(I) \quad \int_0^1 g(u) \, du \approx \sum_{j=1}^q b_j g(c_j)$$

d'ordre au moins p (il en existe pour p quelconque).

1. On considère la méthode à un pas avec points intermédiaires $t_{n,i} = t_n + c_i h_n$ définie comme suit

$$(M') \quad \begin{cases} t_{n,i} = t_n + c_i h_n \\ y_{n,i} = y_n + c_i h_n \Phi(t_n, y_n, c_i h_n) \\ p_{n,i} = f(t_{n,i}, y_{n,i}) \\ 1 \leq i \leq q \\ t_{n+1} = t_n + h_n \\ y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{j=1}^q b_j p_{n,j} \end{cases}$$

Montrer que la méthode (M') est d'ordre au moins $p + 1$.

2. Montrer qu'il existe des méthodes de Runge-Kutta d'ordre p arbitrairement élevé.