

Analyse numérique

Feuille TP4 : Résolution numérique d'équations différentielles ordinaires

Exercice 1 (Schémas explicites avec Python). Le but de cet exercice est d'implémenter les schémas numériques explicites détaillés en cours.

1. Ecrire une fonction en Python, prenant en arguments un réel ξ , une condition initiale $(t_0, y(t_0))$, deux fonctions f et Φ , et un pas de discrétisation, qui réalise l'approximation de la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

au point ξ par la méthode d'approximation à un pas donnée par la fonction Φ .

2. Utiliser cette fonction pour obtenir une fonction réalisant l'approximation par la méthode d'Euler, du point médian et la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.
3. Illustrer avec des cas concrets, par exemple ceux du TD4. Que se passe-t-il si la fonction f a un fort gradient en t ou en y (ou les deux)? Les résultats obtenus sont-ils proches de ceux donnés par `odeint` en `scipy.integrate`?

Exercice 2 (Méthode d'Euler implicite). Le but de cet exercice est d'implémenter le schéma d'Euler implicite (cf. exercice 5 TD4).

1. Grâce à une méthode de résolution numérique (qu'on pourra mettre en argument), écrire une fonction Python prenant en arguments un réel ξ , une condition initiale $(t_0, y(t_0))$, deux fonctions f et Φ , et un pas de discrétisation, qui réalise l'approximation de la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

au point ξ

2. Illustrer avec des cas concrets, par exemple ceux de l'exercice 5 du TD4 et les comparer avec la méthode d'Euler explicite.

Exercice 3 (Construction de fonctions usuelles avec Python). On considère l'équation différentielle $y' = y$ avec condition initiale $y(0) = 1$.

1. Quelle est l'unique solution de cette équation?
2. Ecrire une fonction en Python, prenant en arguments un point x et un nombre d'itérations N , approchant la solution au point x avec différentes méthodes numériques.. On comparera la représentation graphique de la solution à sa version approchée.
3. Ecrire une fonction en Python, prenant en arguments un point x et un nombre d'itérations N , approchant la réciproque de cette solution par la méthode numérique de votre choix.
4. Refaire les questions précédentes avec le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

5. Peut-on obtenir les fonctions cos et sin sur un intervalle de \mathbb{R} comme ci-dessus?