**L1 MPC-MI-DL L2 PPE**
**2025-2026**

# Arithmétique

---

## Feuille de travaux dirigés

## 1 Récurrence

**Exercice 1.** Établir les formules ou assertions suivantes par récurrence.

1. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ 1 + 3 + ... + (2n-1) = n^2$.
3. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 divise $n^3 - n$.
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^0 + 2^1 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
6. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.
7. (*) Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tout produit de $n$ entiers consécutifs est divisible par $n!$.
8. (*) Quels que soient $k, n \in \mathbb{N}$, $(k+1)^n - kn - 1$ est divisible par $k^2$.

**Exercice 2.** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ pour tout $n \geq 0$.

1. Calculer $u_2, u_3, u_4$, puis deviner une formule générale pour $u_n$.
2. Démontrer la formule par une récurrence double.

**Exercice 3.** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + u_0 + \cdots + u_n$ pour tout $n \geq 0$.

1. Calculer $u_1, u_2, u_3$, puis deviner une formule générale pour $u_n$.
2. Démontrer la formule par une récurrence forte.

**Exercice 4.** L'argument par récurrence suivant est-il correct ?

On note, pour tout $n \geq 1$, $P_n$ la proposition suivante : Si une trousse contient $n$ stylos, alors les $n$ stylos sont de la même couleur.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $P_n$ est vraie.
Initialisation : Pour $n = 1$, $P_1$ est vraie puisqu'il n'y a qu'un stylo.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On suppose que $P_n$ est vraie, montrons que $P_{n+1}$ l'est aussi. Prenons une trousse qui a $n+1$ stylos, on en enlève 1, il en reste donc $n$ qui sont de la même couleur par l'hypothèse de récurrence. On en enlève encore 1 dans la trousse puis on remet le premier : il y a à nouveau $n$ stylos : ils sont donc de la même couleur. Donc le premier stylo enlevé a la même couleur que les $n$ autres.

Donc $P_{n+1}$ est vraie.

## 2 Division euclidienne

**Exercice 5.** Soient $a, b, d \in \mathbb{Z}$. Montrer que $d$ divise $a$ et $b$ si et seulement si $d$ divise $ax + by$ quels que soient $x, y \in \mathbb{Z}$.

**Exercice 6.** Soit $k \geq 2$. Montrer qu'une somme de $k$ entiers naturels impairs consécutifs n'est jamais un nombre premier.

**Exercice 7.** Trouver tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x^2 - y^2 = 2\ 019$.
*On pourra commencer par déterminer les diviseurs de 2019.*

**Exercice 8.** (*) Montrer que les carrés parfaits (non nuls) sont les entiers naturels dont les diviseurs positifs sont en nombre impair.

**Exercice 9** (Nombres de Mersenne)**.** Soient $a \geq 2$ et $n \geq 2$. Montrer que si $a^n - 1$ est premier alors $a = 2$ et $n$ est premier.

**Exercice 10.** (*) Soit $q \geq 1$ un entier. Trouver un intervalle de longueur $q$ ne contenant pas de nombres premiers.

**Exercice 11.** Démontrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $2a^3 + 3a^2 + a$ est divisible par 6.

**Exercice 12.** Dans une division euclidienne entre entiers naturels, quels peuvent être le diviseur et le quotient lorsque le dividende est 2 020 et le reste 335 ?

**Exercice 13.** Déterminer les entiers naturels $a$ et $b$ de somme 2 020 et tels que la division euclidienne de $a$ par $b$ donne 4 pour quotient et pour reste 300.

**Exercice 14.** Si le dividende est 1 412 et le quotient 16, que peuvent valoir le diviseur et le reste ?

## 3 PGCD & PPCM

**Exercice 15** (Fonction indicatrice d'Euler)**.** (*) Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\phi(n)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et $n$ et premiers avec $n$.

1. Calculer $\phi(n)$ pour $n \leq 10$, puis $\phi(p)$ et $\phi(p^d)$ pour $p$ premier et $d$ un entier naturel.
2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Établir l'égalité $n = \sum\limits_{d|n} \phi(d)$ en remarquant que

$$\left\{\frac{i}{n} \mid 1 \leq i \leq n\right\} = \bigcup_{d|n} \left\{\frac{j}{d} \mid j \wedge d = 1, 1 \leq j \leq d\right\}.$$

**Exercice 16.** 1. Déterminer les entiers naturels $a, b \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{cases} a + b = 182 \\ a \wedge b = 13 \end{cases}.$$

2. (*) Étant donné des entiers $n \geq 1$ et $d \geq 1$, combien le système

$$\begin{cases} a + b = n \\ a \wedge b = d \end{cases}$$

admet-il de solutions $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ ?

**Exercice 17.** Déterminer le PGCD de 183 et 273 en utilisant l'algorithme d'Euclide. Donner une relation de Bézout et leur PPCM.

**Exercice 18.** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $49x + 37y = 1$ ;
2. $49x + 7y = 3$ ;
3. $5x + 7y = 4$.

**Exercice 19.** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $11x + 40y = 12$
2. $14x + 37y = 3$
3. $12y + 18z = 6b$, où $b$ est un entier fixé
4. $7x + 12y + 18z = 1$.

**Exercice 20.**

1. Soient $d, m \in \mathbb{N}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le système
$$\begin{cases} \mathrm{PGCD}(x,y) = d \\ \mathrm{PPCM}(x,y) = m \end{cases}$$
possède un couple $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ solution.
2. Trouver les solutions pour $m = 60$ et $d = 5$.

**Exercice 21.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite (dite de Fibonacci) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathrm{PGCD}(u_n, u_{n+1}) = 1$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $u_{m+n} = u_m u_{n+1} + u_{m-1}u_n$ et en déduire que $\mathrm{PGCD}(u_m, u_n) = u_{\mathrm{PGCD}(m,n)}$ pour $m$ et $n$ non nuls.

# 4 Théorème fondamental de l'arithmétique

**Exercice 22.** Déterminer les diviseurs de 420.

**Exercice 23.** Combien 10! admet-il de diviseurs ?

**Exercice 24** (Formule de Legendre)**.** (**) Soient $n \geq 1$ un entier et $p \geq 2$ un nombre premier. Soit $N$ le plus petit entier tel que $p^N \geq n$.

1. Soit $u \geq 1$ un entier. Combien y a-t-il de multiples de $u$ dans $\{1, \dots, n\}$ ?
2. Soient $k \geq 1$ et $A_k \coloneqq \big\{l \in \{1, \dots, n\} \mid v_p(l) = k\big\}$. Calculer le cardinal de $A_k$.
3. En déduire la formule de Legendre :
$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{N} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor .$$
4. Par combien de zéros se termine le nombre 1000! ?

**Exercice 25.** Déterminer les factorisations en nombres premiers de 1 323 et 840. En déduire leur PGCD et leur PPCM.

**Exercice 26.** (*) Soit $n$ un nombre entier, $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers. On note $d(n)$ le nombre de diviseurs de $n$.

1. Montrer que $d(n) = \prod_{i=1}^{r}(\alpha_i + 1)$.
2. En déduire que $n$ est un carré parfait si et seulement si $d(n)$ est impair.
3. Montrer que $\prod_{d|n} d = \sqrt{n}^{d(n)}$.

## 5 Base de numération

**Exercice 27.** Soit $n = n_p...n_1n_0$ l'écriture décimale d'un entier naturel $n$. Démontrer les critères de divisiblité de $n$ par les entiers $d$ suivants.

1. $d = 2$ : $n_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.
2. $d = 3$ : $n_0 + ... + n_p$ est divisible par 3.
3. $d = 4$ : $\overline{n_1n_0}^{10}$ est divisible par 4
4. $d = 5$ : $n_0 \in \{0, 5\}$.
5. $d = 9$ : $n_0 + ... + n_p$ est divisible par 9.
6. $d = 11$ : $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k n_k$ est divisible par 11.

**Exercice 28.**

1. Écrire en base 2, en base 5 puis en base 12 les nombres, écrits en base dix, 23, 54 et 131.
2. Quel est le nombre dont l'écriture en base 4 est 222 ?

**Exercice 29.** Effectuer les opérations suivantes en base 2 : $110110+11011$, $111101-10011$, $11001 \times 1011$, $10000111/11011$.

**Exercice 30.** L'entier $N$ qui s'écrit 21 en décimal peut-il s'écrire 27 dans une autre base ? L'entier $N$ qui s'écrit 12551 en décimal peut-il s'écrire 30407 dans une autre base ?

**Exercice 31.** Un nombre de trois chiffres s'écrit $xyz$ en base 7, et $zyx$ en base 9. Quel est ce nombre ?

**Exercice 32.** Sachant que l'on a dans un certain système de numération : $36+45 = 103$, calculer, dans ce système, le produit $36 \times 45$.

**Exercice 33.** Dans quel système de numération a-t-on l'égalité : $122 \times 103 = 13121$ ?

**Exercice 34.** Que vaut le nombre binaire 10100011 en octal (en base 8) ? en hexadécimal (en base 16) ?

**Exercice 35.** Montrer que, quelle que soit la base, le nombre 1331 est toujours le cube d'un entier.

**Exercice 36.** Convertir 1111, 8888 et 9999 de la base 10 à la base 2.

**Exercice 37.**

1. Existe-t-il une base $a$ de numération dans laquelle $\overline{82}^a = \overline{3}^a \times \overline{28}^a$
2. Existe-t-il une base $b$ de numération dans laquelle $\overline{23}^b + \overline{53}^b = \overline{80}^b$ ?

## 6 Arithmétique modulaire

**Exercice 38.** Démontrer que pour tout $n \geq 1$, le nombre $A_n = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

**Exercice 39.** En remarquant que $27 \cdot 37 + 1 = 1\ 000 = 77 \cdot 13 - 1$, déterminer les restes des divisions du nombre $N = 742\ 371\ 149$ par 37 et par 13.

**Exercice 40.** Pourquoi 29 est-il inversible modulo 45 ? Calculer son inverse. Décrire les entiers $n$ vérifiant $29n \equiv 15 \mod 45$.

**Exercice 41.** Trouver le plus petit entier naturel $n$ tel que $997n - 4$ soit divisible par 1000.

**Exercice 42.** (*) Soit $p = 2m + 1$ un nombre premier impair.

1. Montrer que tous les entiers entre 1 et $p-1$ sont inversibles modulo $p$ et déterminer ceux qui sont leur propre inverse.

2. En déduire les congruences $(p-1)! \equiv -1 \mod p$ (théorème de Wilson) et $(m!)^2 \equiv (-1)^{m+1} \mod p$.

**Exercice 43.** (*) Soit $p$ un nombre premier.

1. On suppose $x \in \mathbb{Z}$ non divisible par $p$. Vérifier que
$$ax \equiv bx \mod p \Longleftrightarrow a \equiv b \mod p,$$
et que donc $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = \{\overline{x}, \overline{2}\overline{x}, ..., \overline{(p-1)}\overline{x}\}$.
2. En déduire le petit théorème de Fermat : pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $x^p \equiv x \mod p$, et si $\mathrm{PGCD}(x,p) = 1$, $x^{p-1} \equiv 1 \mod p$.
3. Montrer que $x^{561} \equiv x \mod 561$ pour tout $x$ et remarquer que 561 n'est pas premier. Cela contredit-il le petit théorème de Fermat ?

**Exercice 44.** Résoudre les équations suivantes :

1. $6x \equiv 3 \mod n$ pour $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12$;
2. $(x^2+1)(x^2+2) \equiv 0 \mod 5$;
3. $x^2 + 3x - 2 \equiv 0 \mod n$ pour $n = 2, 3, 6, 7, 13$.

**Exercice 45.** Déterminer les entiers $n$ tels que

1. $n^5 - 2$ soit divisible par 7 ;
2. $n^3 - 2n + 6$ soit divisible par 5 ;
3. $2^{2n} + 2^n + 1$ soit divisible par 7 ;
4. $n^3 + n - 2$ soit divisible par 7.

**Exercice 46.** Résoudre les systèmes de congruences simultanées suivants.

1. $\begin{cases} x \equiv 12 \mod 17 \\ x \equiv 2 \mod 7 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x \equiv 3 \mod 11 \\ x \equiv 5 \mod 7 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x \equiv 3 \mod 17 \\ x \equiv 4 \mod 11 \\ x \equiv 5 \mod 6 \end{cases}$

**Exercice 47.** Résoudre les systèmes de congruences simultanées suivants.

1. $\begin{cases} x \equiv 2 \mod 5 \\ x \equiv 3 \mod 10 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x \equiv 15 \mod 22 \\ x \equiv 19 \mod 28 \end{cases}$

**Exercice 48.** Résoudre le système de congruences $\begin{cases} 2x \equiv 5 \mod 13 \\ 3x \equiv 5 \mod 11 \end{cases}$ et donner la plus petite solution strictement positive.

**Exercice 49.** Dix-sept pirates s'emparent d'un lot de pièces d'or toutes identiques dans un coffre ne pouvant pas en contenir plus de 1500. Leur loi exige un partage à égalité : chacun doit recevoir le même nombre de pièces d'or et, s'il y a un reste, celui-ci est attribué au cuisinier de bord. Dans le cas présent, la part du cuisinier serait de trois pièces, mais les pirates se querellent et six d'entre eux sont tués, ce qui porte la part du cuisinier à quatre pièces. Au cours d'une terrible tempête, le bateau fait naufrage et ne survivent que six pirates et le cuisinier. Par bonheur, le butin est sauvé. La part du cuisinier est maintenant de cinq pièces. Que peut espérer gagner le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste de l'équipage ?

**Exercice 50.** Démontrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9.

**Exercice 51.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^7 \equiv n \mod 42$.