

Fonctions à deux variables

Contrôle continu

Durée : 1h00.

Toute réponse doit être justifiée.

Le correcteur tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.

Les appareils électroniques et tout document sont interdits.

Exercice 1 (2). Donner la définition d'ouvert (de $\mathbb{R}^2$).

Exercice 2 ($2*2+2*2+4+(1+2)$). Soit C un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. La fonction indicatrice de C est la fonction $\mathbb{1}_C: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \mathbb{1}_C(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Donner la définition de l'adhérence de C et de l'intérieur de C .
2. Montrer que $\mathbb{1}_C$ est continue en tout point de $\overset{\circ}{C}$ et en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C}$.
3. Montrer que $\mathbb{1}_C$ n'est pas continue en tout point de $\overline{C} \setminus \overset{\circ}{C}$.

Indication : Pour les questions 2 et 3, un dessin donnant les valeurs prises par $\mathbb{1}_C$ devrait aider à la résolution.

4. Montrer que $\mathbb{1}_C$ est continue si, et seulement si, $C = \emptyset$ ou $C = \mathbb{R}^2$.
On pourra utiliser que les seuls ouverts fermés sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 ($2*2+2$). Soient S, T deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$. Montrer que

1. $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$
2. $\overset{\circ}{S} \cup \overset{\circ}{T} \subset \widehat{S \cup T}$

Exercice 4 ($4+5$). Soient $a, b \in \mathbb{R}^2$ et $r, s > 0$.

1. Montrer que si $B_f(a, r) \subset B_f(b, s)$ alors $\|a - b\| \leq s - r$.
2. Montrer que si $B_f(a, r) \cap B_f(b, s) = \emptyset$ alors $\|a - b\| > s + r$.

Indication : Dans les deux cas, on pourra considérer un point bien choisi de la droite définie par a et b .

Exercice 5 ($2+(3+3)/2+2$). Déterminer les couples $(a, b) \in]0, +\infty[^2$ pour lesquels la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) := \begin{cases} \frac{|x|^a |y|^b}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est continue.

Indication : on pourra commencer par étudier le cas $(a, b) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ et $(a, b) = (\frac{3}{2}, 1)$. La résolution complète de ces cas rapportera des points.

Exercice 6 ($0.5*4$). Pour chacune des lettres grecques suivantes, donner son nom en français et préciser s'il s'agit d'une minuscule ou d'une majuscule :

1. Γ
2. φ
3. H
4. ξ