

# Fonctions à deux variables

## Contrôle continu

*Durée : 1h00.*

*Toute réponse doit être justifiée.*

*Le correcteur tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.*

*Les appareils électroniques et tout document sont interdits.*

**Exercice 1** (2). Donner la définition d'ouvert (de  $\mathbb{R}^2$ ).

*Solution :* Un ouvert est une partie  $S$  de  $\mathbb{R}^2$  telle que

$$\forall x \in S, \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset S.$$

**Exercice 2** ( $2*2+2*2+4+(1+2)$ ). Soit  $C$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$ . La fonction indicatrice de  $C$  est la fonction  $\mathbb{1}_C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \mathbb{1}_C(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Donner la définition de l'adhérence de  $C$  et de l'intérieur de  $C$ .
2. Montrer que  $\mathbb{1}_C$  est continue en tout point de  $\overset{\circ}{C}$  et en tout point de  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C}$ .
3. Montrer que  $\mathbb{1}_C$  n'est pas continue en tout point de  $\overline{C} \setminus \overset{\circ}{C}$ .

*Indication : Pour les questions 2 et 3, un dessin donnant les valeurs prises par  $\mathbb{1}_C$  devrait aider à la résolution.*

4. Montrer que  $\mathbb{1}_C$  est continue si, et seulement si,  $C = \emptyset$  ou  $C = \mathbb{R}^2$ .  
*On pourra utiliser que les seuls ouverts fermés sont  $\emptyset$  et  $\mathbb{R}^2$ .*

*Solution :*

1.  $\overset{\circ}{C} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset C\}$  et  $\overline{C} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap C \neq \emptyset\}$
2. Soit  $x \in \overset{\circ}{C}$ . Fixons  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(x, \varepsilon) \subset C$ . On en déduit donc que la fonction  $\mathbb{1}_{C|B(x, \varepsilon)}$  est constante et est donc continue. De la même façon, comme  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C}$  est ouvert (comme complémentaire d'un fermé),  $\mathbb{1}_C$  est constante au voisinage de n'importe lequel point de  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C}$ .
3. Si  $x \in \overline{C} \setminus \overset{\circ}{C} = \overline{C} \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \overset{\circ}{C}) = \overline{C} \cap \overline{C^c}$  alors
  - $\forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap C \neq \emptyset$
  - $\forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap C^c \neq \emptyset$

Posons  $\varepsilon = 1/2$ . Soit  $\delta > 0$ . Grâce aux deux conditions précédentes, on trouve  $y_1 \in B(x, \delta) \cap C, y_2 \in B(x, \delta) \cap C^c$  et donc  $\mathbb{1}_C(y_1) = 1$  et  $\mathbb{1}_C(y_2) = 0$ . Si  $x \in C$  alors  $|\mathbb{1}_C(x) - \mathbb{1}_C(y_2)| > \varepsilon$  et si  $x \in C^c$  alors  $|\mathbb{1}_C(x) - \mathbb{1}_C(y_1)| > \varepsilon$

4. Si  $C = \emptyset$  ou  $C = \mathbb{R}^2$  alors  $\mathbb{1}_C$  est constante et donc continue. Réciproquement, si  $\mathbb{1}_C$  est continue alors  $\overline{C} \setminus \overset{\circ}{C} = \emptyset$ . Comme  $\overset{\circ}{C} \subset \overline{C}$  alors  $\overline{C} = \overset{\circ}{C}$ . Comme  $\overline{C} \supset C \supset \overset{\circ}{C}$  alors  $\overline{C} = C = \overset{\circ}{C}$ . L'ensemble  $C$  est donc ouvert et fermé, ce qui permet de conclure.

On pourrait aussi dire que comme  $\mathbb{1}_C$  est continue et  $C = \mathbb{1}_C^{-1}(\{1\}) = \mathbb{1}_C^{-1}(\mathbb{R}^*)$  alors  $C$  est un ouvert fermé.

**Exercice 3** ( $2*2+2$ ). Soient  $S, T$  deux sous-ensembles de  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que

$$1. \overline{S \cup T} = \overline{S \cup T}$$

$$2. \overset{\circ}{S} \cup \overset{\circ}{T} \subset \widehat{S \cup T}$$

*Solution :*

• Méthode 1

1. Comme  $S \cup T \subset \overline{S \cup T}$  alors comme  $\overline{S \cup T}$  est un fermé (comme union finie de fermés — les deux adhérences) contenant  $S \cup T$  alors  $\overline{S \cup T} \subset \overline{S \cup T}$ . Comme  $S \subset S \cup T \subset \overline{S \cup T}$  et que  $\overline{S \cup T}$  est fermé alors  $\overline{S} \subset \overline{S \cup T}$ . On montre de la même façon que  $\overline{T} \subset \overline{S \cup T}$  et donc  $\overline{S \cup T} \subset \overline{S \cup T}$ , ce qui permet de conclure.

2. Comme  $\overset{\circ}{S} \subset \widehat{S \cup T}$  et  $\overset{\circ}{T} \subset \widehat{S \cup T}$  alors  $\overset{\circ}{S} \cup \overset{\circ}{T} \subset \widehat{S \cup T}$

• Méthode 2 :

1. Soient  $x \in \overline{S \cup T}$  et  $\varepsilon > 0$ .

- Si  $x \in \overline{S}$  alors  $B(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$ . Comme  $S \subset S \cup T$  alors  $B(x, \varepsilon) \cap (S \cup T) \neq \emptyset$  ;
- Si  $x \in \overline{T}$  alors  $B(x, \varepsilon) \cap T \neq \emptyset$ . Comme  $T \subset S \cup T$  alors  $B(x, \varepsilon) \cap (S \cup T) \neq \emptyset$ .

On en déduit donc que  $x \in \overline{S \cup T}$ . Pour montrer l'inclusion réciproque, on va passer au complémentaire : on va montrer  $(\overline{S \cup T})^c \subset (\widehat{S \cup T})^c$ . Notons tout d'abord que

$$(\overline{S \cup T})^c = \overline{S}^c \cap \overline{T}^c = \widehat{S^c} \cap \widehat{T^c}$$

et

$$(\widehat{S \cup T})^c = \widehat{(S \cup T)^c} = \widehat{S^c \cap T^c}$$

Soit  $x \in (\overline{S \cup T})^c = \widehat{S^c} \cap \widehat{T^c}$ . Alors  $x \in \widehat{S^c}$  et  $x \in \widehat{T^c}$ . Fixons  $\varepsilon_1 > 0$  et  $\varepsilon_2 > 0$  tels que

$$B(x, \varepsilon_1) \subset S^c \text{ et } B(x, \varepsilon_2) \subset T^c$$

Posons  $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ . Alors

$$B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_1) \subset S^c \text{ et } B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_2) \subset T^c$$

et donc  $B(x, \varepsilon) \subset S^c \cap T^c$ . On en déduit donc que  $x \in \widehat{S^c \cap T^c}$ .

2. Soit  $x \in \overset{\circ}{S} \cup \overset{\circ}{T}$ .

- Si  $x \in \overset{\circ}{S}$  alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(x, \varepsilon) \subset S \subset S \cup T$  ;
- Si  $x \in \overset{\circ}{T}$  alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(x, \varepsilon) \subset T \subset S \cup T$ .

On en déduit donc que  $x \in \widehat{S \cup T}$ .

**Exercice 4** (4+5). Soient  $a, b \in \mathbb{R}^2$  et  $r, s > 0$ .

1. Montrer que si  $B_f(a, r) \subset B_f(b, s)$  alors  $\|a - b\| \leq s - r$ .
2. Montrer que si  $B_f(a, r) \cap B_f(b, s) = \emptyset$  alors  $\|a - b\| > s + r$ .

*Indication : Dans les deux cas, on pourra considérer un point bien choisi de la droite définie par  $a$  et  $b$ .*

*Solution :*

1. Supposons que  $B_f(a, r) \subset B_f(b, s)$ .

Si  $a = b$  alors  $v := a + re_1 \in B(a, r) \subset B(a, s)$  donc  $r = \|v - a\| \leq s$  et donc  $s - r \geq 0 = \|a - b\|$ .

Supposons que  $a \neq b$ . Soit  $x := a - \frac{r}{\|b - a\|}(b - a)$ . C'est le point de la droite définie par  $a$  et  $b$ , et de la boule  $B_f(a, r)$  le plus éloigné de  $b$ .

Montrons que  $x \in B_f(a, r)$  :

$$\|x - a\| = \left\| \frac{r}{\|b - a\|}(b - a) \right\| = \frac{r}{\|b - a\|} \|(b - a)\| = r$$

Par hypothèse, on sait que  $x \in B_f(b, s)$  et donc  $\|x - b\| \leq s$  et donc

$$s \geq \|x - b\| = \left\| a - \frac{r}{\|b - a\|}(b - a) - b \right\| = \left\| \left( 1 + \frac{r}{\|b - a\|} \right) (b - a) \right\| = \left( 1 + \frac{r}{\|b - a\|} \right) \|(b - a)\| = \|b - a\| + r$$

et donc

$$\|b - a\| \leq s - r$$

2. On va démontrer le résultat par contraposée : si  $\|a - b\| \leq s + r$  alors  $B_f(a, r) \cap B_f(b, s) \neq \emptyset$ . Montrons que

$$x := \frac{s}{s+r}a + \frac{r}{r+s}b \in B_f(a, r) \cap B_f(b, s).$$

On a :

$$\|x - a\| = \left\| \frac{s}{s+r}a + \frac{r}{r+s}b - a \right\| = \left\| -\frac{r}{s+r}a + \frac{r}{r+s}b \right\| = \frac{r}{r+s}\|b - a\| \leq r$$

et

$$\|x - b\| = \left\| \frac{s}{s+r}a + \frac{r}{r+s}b - b \right\| = \left\| \frac{s}{s+r}a - \frac{s}{r+s}b \right\| = \frac{s}{r+s}\|b - a\| \leq s.$$

**Exercice 5**  $(2+(3+3)/2+2)$ . Déterminer les couples  $(a, b) \in ]0, +\infty[^2$  pour lesquels la fonction  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) := \begin{cases} \frac{|x|^a |y|^b}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est continue.

*Indication : on pourra commencer par étudier le cas  $(a, b) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$  et  $(a, b) = (\frac{3}{2}, 1)$ . La résolution complète de ces cas rapportera des points.*

*Solution : **Erratum** : J'ai ajouté des valeurs absolues pour que la fonction soit définie sur tout  $\mathbb{R}^2$ .*

Soient  $(a, b) \in ]0, +\infty[^2$ . Alors la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Étudions maintenant la continuité en  $(0, 0)$ . On va passer en coordonnées polaires : pour  $r > 0, \theta \in \mathbb{R}$ ,

$$|f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))| = \frac{|r^a \cos(\theta)|^a |r^b \sin(\theta)|^b}{r^2} = r^{a+b-2} |\cos(\theta)|^a |\sin(\theta)|^b \leq r^{a+b-2}.$$

Si  $a + b - 2 > 0$  alors  $\lim_{r \rightarrow 0} r^{a+b-2} = 0$  et donc la fonction est continue.

Si  $a + b - 2 \leq 0$  alors en prenant la fonction continue  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$\gamma(t) = (t, t),$$

on a :

$$f(\gamma(t)) = \frac{|t|^{a+b}}{2t^2} = \frac{1}{2}|t|^{a+b-2} \rightarrow \infty \neq 0.$$

si  $a + b < 0$  et

$$f(\gamma(t)) = \frac{1}{2} \neq 0$$

si  $a + b = 2$ .

On en déduit donc que  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

**Exercice 6**  $(0.5*4)$ . Pour chacune des lettres grecques suivantes, donner son nom en français et préciser s'il s'agit d'une minuscule ou d'une majuscule :

1.  $\Gamma$

2.  $\varphi$

3.  $H$

4.  $\xi$

*Solution :*

- gamma majuscule
- phi minuscule
- eta majuscule
- xi minuscule