L3 PPPE
2024-2025

Suites et Séries

Contrôle continu

Durée : 2h.
Toute réponse doit être justifiée.
Le correcteur tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.
Les appareils électroniques et tout document sont interdits.

Exercice 1. En utilisant les définitions du cours, montrer que

1. la suite de terme général $u_n = \frac{3n+17}{n+4}$ tend vers 3 ;
2. la suite de terme général $u_n = \frac{n^2+1}{n+1}$ tend vers $+\infty$;
3. une suite convergente est bornée.

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Énoncer (avec des quantificateurs) une condition nécessaire et suffisante sur le développement décimal propre de x pour que ce soit un nombre rationnel.

Exercice 3. Soit (P_n) la suite (dite de Pell) définie par $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n. \tag{*}$$

1. Déterminer les deux suites géométriques (a_n) et (b_n) de valeur initiale $a_0 = b_0 = 1$ vérifiant la relation de récurrence (*).

   On supposera dans la suite que la raison de (a_n) est supérieure à celle de (b_n).
2. Déterminer l'unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} \alpha a_0 + \beta b_0 = P_0 \\ \alpha a_1 + \beta b_1 = P_1 \end{cases}$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n = \alpha a_n + \beta b_n.$$

4. Trouver un équivalent simple de (P_n).

Exercice 4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $2u_{n+1} = u_n + 3$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que $u_n \leq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) est convergente.
4. Montrer que la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n - 3$ est géométrique et convergente.
5. En déduire la limite de (u_n).

6. Soit (T_n) la suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$
Déterminer l'expression de T_n en fonction de n et en donner un équivalent simple.

Exercice 5. 1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$$
et
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$
sont convergentes et de même limite.

3. En déduire que la suite de terme général
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$
est équivalente à la suite de terme général $2\sqrt{n}$

Exercice 6. Les nombres suivants sont-ils irrationnels ?

1. $\sqrt{7}$
2. $\sqrt{144}$
3. $\frac{\ln(12)}{\ln(5)}$

Exercice 7. Écrire sous forme de fraction irréductible les nombres rationnels suivants :

1. $0.0\underline{49}$
2. $0.02\underline{4}$

Exercice 8. Écrire le développement décimal propre des fractions suivantes :

1. $\frac{5}{12}$
2. $\frac{17}{250}$
3. $\frac{5}{42}$