L3 PPPE
2026-2027

Suites et séries numériques

Contrôle continu

Durée : 1h30.
Toute réponse doit être justifiée.
Le correcteur tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.
Les appareils électroniques et tout document sont interdits.

Exercice 1. Soit (u_n) la suite arithmético-géométrique de terme initial $u_0 \in \mathbb{R}$ et de relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$ avec $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 a^n + \frac{b(1-a^n)}{1-a}$.

Exercice 2. En utilisant les définitions du cours, montrer que

1. la suite de terme général $u_n = \frac{4n+2}{n-2}$ tend vers 4 ;
2. la suite de terme général $v_n = \frac{2^n}{3^{n+1}+1}$ tend vers 0.

Exercice 3. Soit (B_n) la suite définie par $B_0 = 0$, $B_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B_{n+2} = 3B_{n+1} + B_n. \tag{*}$$

1. Déterminer les deux suites géométriques (a_n) et (b_n) de valeur initiale $a_0 = b_0 = 1$ vérifiant la relation de récurrence (*).

   On supposera dans la suite que la raison de (a_n) est supérieure à celle de (b_n).

2. Déterminer l'unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} \alpha a_0 + \beta b_0 = B_0 \\ \alpha a_1 + \beta b_1 = B_1 \end{cases}$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n = \alpha a_n + \beta b_n.$$

4. Trouver un équivalent simple de (B_n).

Exercice 4. Donner un équivalent simple des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

1. $u_n \coloneqq \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$;
2. $v_n \coloneqq \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de montrer la convergence de la limite $(\cos(\pi\sqrt{n^2+n}))$ et de calculer sa limite.

1. Montrer que la suite $(\sqrt{n^2+n} - n)$ est convergente et calculer sa limite.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos(x)$.
3. En déduire la convergence et la limite de la suite $(\cos(\pi\sqrt{n^2+n}))$.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $\forall n \geq 1, u_n \coloneqq \left(5\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{5}\cos(n)\right)^n$.

1. Montrer que $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \to 0$ et en déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \left|\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| \leq \frac{1}{42}$.
2. Pour un tel N, montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ tel que $\forall n \geq N, 0 \leq |u_n| \leq a^n$.
3. En déduire la limite de u_n.