L3 M-MA-DL
2026-2027

Topologie et calcul différentiel

Contrôle continu

Durée : 1h30.
Outils électroniques et documents non autorisés.

Toute réponse doit être justifiée. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la présentation. Le cas échéant, on pourra admettre explicitement le résultat d'une question pour répondre à une question suivante.

Exercice 1. Soient E un espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes sur E. Montrer que la fonction donnée par $N(x) \coloneqq \max(N_1(x), N_2(x))$, pour tout $x \in E$, est une norme sur E.

Exercice 2. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $K_1, \dots, K_n$ des parties compactes. On pose

$$K \coloneqq \bigcup_{j=1}^{n} K_j \,.$$

Montrer que K est compact.

Exercice 3. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel fermé de E et $u \in E \setminus F$. Soit (y_n) une suite de $F \oplus \mathrm{Vect}(u)$ convergeant vers y. On écrira

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad y_n = x_n + \lambda_n u$$

avec (x_n) une suite de F et (λ_n) une suite de $\mathbb{R}$.

1. On va montrer, par l'absurde, que (λ_n) est bornée. Supposons que (λ_n) ne le soit pas.
   (a) Construire une sous-suite $(\lambda_{\varphi(n)})$ de (λ_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_{\varphi(n)} \neq 0$ et $|\lambda_{\varphi(n)}| \to +\infty$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\widetilde{y}_n \coloneqq \frac{1}{\lambda_{\varphi(n)}} y_{\varphi(n)}$. Calculer la limite de cette suite et aboutir à une contradiction.
2. En déduire que (λ_n) admet une sous-suite convergente et qu'il en est de même pour (x_n).
3. En déduire que $F \oplus \mathrm{Vect}(u)$ est fermé.
4. Soit G un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Montrer que $F + G$ est fermé.

Tourner SVP

Exercice 4. On considère la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^d$. Dans cet exercice, on pourra noter, pour tous $x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle x, y \rangle \coloneqq \sum_{j=1}^{d} x_j y_j \,.$$

et observer que $\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle$. On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$f(x) \coloneqq \frac{1}{1 + \|x\|_2} x \,.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Montrer que f est différentiable en a et donner l'expression de sa différentielle en a.

2. Déterminer, si c'est possible, la dérivée directionnelle de f en 0 dans toute direction v. La fonction f est-elle différentiable en 0 ?