

Analyse numérique

Contrôle continu 2

Durée : 2h30.

Toute réponse doit être justifiée.

Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.

Les appareils électroniques sont interdits. Une feuille de taille A4 de notes est autorisée.

Le sujet comporte 4 pages.

Exercice 1. Soit $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère la méthode d'approximation suivante :

$$\int_{-1}^1 f(x) \, dx \approx \alpha f(-1) + \beta f(-\xi) + \beta f(\xi) + \alpha f(1)$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\xi \in]0, 1[$.

1. Rappeler la définition de l'ordre d'une méthode de calcul numérique d'intégrales.
2. Soit $\xi \in]0, 1[$. Déterminer l'unique couple (α, β) en fonction de ξ pour lequel la méthode d'approximation soit d'ordre supérieur ou égal à 2. Est-elle d'ordre supérieur ou égal à 3 ?
3. Déterminer la valeur de ξ pour laquelle la méthode soit d'ordre supérieur ou égal à 5.

Exercice 2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On pose $h := \frac{b-a}{N}$ et, pour $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $x_k := a + kh$. Soient $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $t_1, \dots, t_m \in [0, h]$ avec $t_1 \dots < t_m$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

On considère la méthode d'approximation définie sur $[x_k, x_{k+1}]$ par :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \, dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{j=1}^m \alpha_j f(x_k + t_j)$$

et donc

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=1}^m \alpha_j f(x_k + t_j)$$

Pour $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ et pour $g: [x_k, x_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}$, on pose $I_k(g) := \sum_{j=1}^m \alpha_j g(x_k + t_j)$.

On pose aussi $I(f) := \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} I_k(f|_{[x_k, x_{k+1}]})$.

1. Expliciter les coefficients pour obtenir la méthode de Simpson.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que cette méthode d'approximation est d'ordre n et supposons que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Pour $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, on pose $P_{k,n}: x \in [x_k, x_{k+1}] \mapsto \sum_{\ell=0}^n \frac{f^{(\ell)}(x_k)}{\ell!} (x - x_k)^\ell \in \mathbb{R}$ et $u_k := f - P_{k,n}$ sur $[x_k, x_{k+1}]$.

(a) Justifier que $f^{(n+1)}$ est bornée.

(b) Montrer que : $\forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \forall x \in [x_k, x_{k+1}], |u_k(x)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)| \frac{(x - x_k)^{n+1}}{(n+1)!}$.

(c) Montrer que : $\int_a^b f(x) \, dx - I(f) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} u_k(x) \, dx - h I_k(u_k) \right).$

(d) Montrer qu'il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ indépendante de N telle que

$$\forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \int_{x_k}^{x_{k+1}} |u_k(x)| \, dx \leq C_1 h^{n+2}.$$

(e) Montrer qu'il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ indépendante de N telle que

$$\forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, |I_k(u_k)| \leq C_2 h^{n+1}.$$

(f) En déduire qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ indépendante de N telle que

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - I(f) \right| \leq \frac{C(b-a)^{n+2}}{N^{n+1}}.$$

Exercice 3. 1. Déterminer l'unique fonction $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

- σ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$;
- $\sigma(t) = 0$ pour $t \leq 0$;
- $\sigma|_{[0, +\infty[}$ est une fonction polynomiale de degré au plus 3 ;
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sigma^{(3)}(t) = 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soit $(t_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite strictement croissante d'éléments de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

- s est de classe $\mathcal{C}^2$;
- pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, la fonction $s|_{[t_i, t_{i+1}]}$ est polynomiale de degré au plus 3 ;
- les fonctions $s|_{]-\infty, t_1]}$ et $s|_{[t_n, +\infty[}$ sont des fonctions polynomiales de degré au plus 1 ;

(a) Montrer que tout $s \in \mathcal{S}$ vérifie une égalité de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, s(t) = \alpha + \beta t + \sum_{i=1}^n \gamma_i \sigma(t - t_i)$$

où $\alpha, \beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$.

(b) En déduire que $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{R}$ -sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ puis déterminer sa dimension.

Indication : On pourra utiliser le fait que sur $[t_n, +\infty[$, la fonction polynomiale s n'est plus de degré 3 mais de degré 1.

3. Supposons $n = 3$, $t_1 = -1$, $t_2 = 0$ et $t_3 = 1$. Montrer qu'il existe une unique fonction $s \in \mathcal{S}$ vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, s(t_i) = t_i^2.$$

Dessiner les graphes de $t \mapsto t^2$ et s sur $[-2, 2]$.

4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer qu'il existe une unique fonction $s \in \mathcal{S}$ vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, s(t_i) = f(t_i).$$

Problème. Soient $q, p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions inconnues et (q_0, p_0) un point de $\mathbb{R}^2$. On considère le système différentiel suivant

$$\begin{cases} q'(t) &= p(t) \\ p'(t) &= -q(t) \end{cases} \quad (1)$$

avec la condition initiale $(q(0), p(0)) = (q_0, p_0)$.

Existence et unicité de la solution

1. Écrire le système (1) sous la forme $Y' = F(t, Y)$ où $Y := (q, p)$.
2. Montrer que la fonction F obtenue dans la question précédente est (globalement) lipschitzienne par rapport à la seconde variable.
3. En déduire que pour toute donnée initiale $(q_0, p_0) \in \mathbb{R}^2$, le système (1) admet une unique solution globale $(q, p) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.
4. Calculer explicitement la solution du système (1) pour $(q_0, p_0) = (0, 1)$.
On pourra calculer q'' .

Conservation de l'hamiltonien

On considère la fonction H définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$H(x, y) := \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Cette fonction est l'*hamiltonien* associé à l'équation (1).

1. Soient $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Montrer que $t \mapsto H(q(t), p(t))$ est dérivable et calculer sa dérivée.
2. On considère (q, p) l'unique solution du système (1) telle que $(q(0), p(0)) = (q_0, p_0)$. Montrer que la fonction $t \mapsto H(q(t), p(t))$ est constante.

Dans toute la suite, on considère $0 < h < 1$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n := nh$.

On cherche à approcher la solution $(q(t), p(t))$ du système (1) aux temps discrets t_n à l'aide de deux méthodes numériques différentes. On introduit pour cela des suites $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$q_n \approx q(t_n), \quad p_n \approx p(t_n).$$

Euler explicite

1. Rappeler le schéma d'Euler explicite associé à la subdivision $t_0 < \dots < t_n$ pour une fonction y solution de

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

2. En admettant que ce schéma se généralise aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, en déduire le schéma d'Euler explicite associé au système (1).
On notera $((q_n, p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de $\mathbb{R}^2$ ainsi obtenue.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$H(q_{n+1}, p_{n+1}) = (1 + h^2) H(q_n, p_n).$$

- (b) En déduire que la suite $(H(q_n, p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge lorsque $n \rightarrow \infty$ si $(p_0, q_0) \neq (0, 0)$.
- (c) Ce résultat semble-t-il cohérent avec celui obtenu à la question 2. de la partie précédente ?

Euler symplectique

On considère maintenant le schéma d'Euler symplectique défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} p_{n+1} &= p_n - h q_n \\ q_{n+1} &= q_n + h p_{n+1} \end{cases}.$$

1. Calculer (q_1, p_1) en fonction de (q_0, p_0) . Dans quel ordre doit-on calculer les approximations ?
2. **Conservation d'une quantité proche de l'énergie**
On considère la fonction modifiée $\tilde{H}_h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tilde{H}_h(x, y) := H(x, y) - \frac{h}{2}xy$$

où H est l'hamiltonien défini dans la partie précédente. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{H}_h(q_n, p_n) = \tilde{H}_h(q_0, p_0).$$

En déduire que les points (q_n, p_n) restent sur une courbe fermée du plan.

3. Variation de l'énergie classique

- (a) Montrer que pour le schéma d'Euler symplectique, l'énergie classique n'est pas exactement conservée, mais que sa variation à chaque pas est de l'ordre h^2 , c'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$H(q_{n+1}, p_{n+1}) = H(q_n, p_n) + h^2 u_n$$

où h est le pas de temps et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite qui dépend de h et des suites $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

(c) En déduire que le schéma d'Euler symplectique est plus adapté à la simulation à long terme du système (1).

4. **Simulation Python**

Écrire un programme Python qui implémente le schéma d'Euler symplectique.