

Analyse numérique

Contrôle continu 2

Durée : 2h30.

Toute réponse doit être justifiée.

*Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.
Les appareils électroniques sont interdits. Une feuille de taille A4 de notes est autorisée.
Le sujet comporte 4 pages.*

Exercice 1. Soit $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère la méthode d'approximation suivante :

$$\int_{-1}^1 f(x) \, dx \approx \alpha f(-1) + \beta f(-\xi) + \beta f(\xi) + \alpha f(1)$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\xi \in]0, 1[$.

1. Rappeler la définition de l'ordre d'une méthode de calcul numérique d'intégrales.
2. Soit $\xi \in]0, 1[$. Déterminer l'unique couple (α, β) en fonction de ξ pour lequel la méthode d'approximation soit d'ordre supérieur ou égal à 2. Est-elle d'ordre supérieur ou égal à 3 ?
3. Déterminer la valeur de ξ pour laquelle la méthode soit d'ordre supérieur ou égal à 5.

Solution : Dans ce qui suit, on identifiera un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et la fonction polynomiale qui lui est associée.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et A une méthode de calcul numérique d'intégrales sur un intervalle $[a, b]$. La méthode A est d'ordre n si pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$A(P) = \int_a^b P(x) \, dx$$

et s'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n + 1$ tel que

$$A(P) \neq \int_a^b P(x) \, dx.$$

2. Notons A la méthode proposée. La méthode $A : f \mapsto A(f)$ étant linéaire, elle est d'ordre supérieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si $A(X^k) = \int_{-1}^1 x^k \, dx$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq n$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ impair, par imparité de X^k , on a

$$A(X^k) = 0 = \int_{-1}^1 x^k \, dx.$$

De plus,

$$A(1) = 2(\alpha + \beta),$$

$$\int_{-1}^1 1 \, dx = 2,$$

$$A(X^2) = \alpha((-1)^2 + 1) + \beta((-\xi)^2 + \xi^2) = 2(\alpha + \beta\xi^2)$$

et

$$\int_{-1}^1 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}.$$

Ainsi, la méthode est d'ordre supérieur ou égal à 2 si et seulement si $\begin{cases} 2(\alpha + \beta) = 2 \\ 2(\alpha + \beta\xi^2) = \frac{2}{3} \end{cases}$. Résolvons ce système.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2(\alpha + \beta) = 2 \\ 2(\alpha + \beta\xi^2) = \frac{2}{3} \end{cases} &\iff \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \beta\xi^2 = \frac{1}{3} \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \beta(\xi^2 - 1) = -\frac{2}{3} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \beta = \frac{2}{3(1-\xi^2)} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = 1 - \frac{2}{3(1-\xi^2)} \\ \beta = \frac{2}{3(1-\xi^2)} \end{cases}. \end{aligned}$$

Comme 3 est un nombre impair, on a vu que

$$A(X^3) = \int_{-1}^1 x^3 \, dx = 0,$$

donc pour ces valeurs de α et β , la méthode est d'ordre supérieur ou égal à 3.

3. Soit $\xi \in]0, 1[$, $\alpha = 1 - \frac{2}{3(1-\xi^2)}$ et $\beta = \frac{2}{3(1-\xi^2)}$. Comme précédemment, $A(X^5) = \int_{-1}^1 x^5 \, dx = 0$, donc la méthode est d'ordre supérieur ou égal à 5 si et seulement si $A(X^4) = \int_{-1}^1 x^4 \, dx$.

On a

$$A(X^4) = 2\alpha + 2\beta\xi^4 = 2\left(1 - \frac{2(1-\xi^4)}{3(1-\xi^2)}\right) = 2\left(1 - \frac{2(1+\xi^2)}{3}\right)$$

et

$$\int_{-1}^1 x^4 \, dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^1 = \frac{2}{5},$$

donc la méthode est d'ordre supérieur ou égal à 5 si et seulement si $2\left(1 - \frac{2(1+\xi^2)}{3}\right) = \frac{2}{5}$ si et seulement si $\xi^2 = \frac{1}{5}$ si et seulement si

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(car $\xi \geq 0$).

Exercice 2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On pose $h := \frac{b-a}{N}$ et, pour $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $x_k := a + kh$. Soient $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $t_1, \dots, t_m \in [0, h]$ avec $t_1 \dots < t_m$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

On considère la méthode d'approximation définie sur $[x_k, x_{k+1}]$ par :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \, dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{j=1}^m \alpha_j f(x_k + t_j)$$

et donc

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=1}^m \alpha_j f(x_k + t_j)$$

Pour $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ et pour $g : [x_k, x_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}$, on pose $I_k(g) := \sum_{j=1}^m \alpha_j g(x_k + t_j)$.

On pose aussi $I(f) := \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} I_k(f|_{[x_k, x_{k+1}]})$.

1. Expliciter les coefficients pour obtenir la méthode de Simpson.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que cette méthode d'approximation est d'ordre n et supposons que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Pour $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, on pose $P_{k,n} : x \in [x_k, x_{k+1}] \mapsto \sum_{\ell=0}^n \frac{f^{(\ell)}(x_k)}{\ell!} (x - x_k)^\ell \in \mathbb{R}$ et $u_k := f - P_{k,n}$ sur $[x_k, x_{k+1}]$.

(a) Justifier que $f^{(n+1)}$ est bornée.

(b) Montrer que : $\forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \forall x \in [x_k, x_{k+1}], |u_k(x)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)| \frac{(x - x_k)^{n+1}}{(n+1)!}$.

(c) Montrer que : $\int_a^b f(x) \, dx - I(f) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} u_k(x) \, dx - h I_k(u_k) \right)$.

(d) Montrer qu'il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ indépendante de N telle que

$$\forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \int_{x_k}^{x_{k+1}} |u_k(x)| \, dx \leq C_1 h^{n+2}.$$

(e) Montrer qu'il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ indépendante de N telle que

$$\forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, |I_k(u_k)| \leq C_2 h^{n+1}.$$

(f) En déduire qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ indépendante de N telle que

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - I(f) \right| \leq \frac{C(b-a)^{n+2}}{N^{n+1}}.$$

Solution : Posons $h = \frac{b-a}{N}$.

1. La méthode de Simpson utilise l'approximation

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \, dx \approx h \frac{f(x_k) + 4f(x_k + \frac{h}{2}) + f(x_{k+1})}{6}.$$

Cela correspond à

$$m = 3, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{h}{2}, \quad t_3 = h, \quad \alpha_1 = \frac{1}{6}, \quad \alpha_2 = \frac{4}{6}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{6}.$$

2. (a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, donc $f^{(n+1)}$ est bien définie et continue sur le segment $[a, b]$. D'après le théorème des bornes atteintes, $f^{(n+1)}$ est bornée (et atteint ses bornes).
- (b) Soit $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ et $x \in [x_k, x_{k+1}]$. Si $x = x_k$, alors l'inégalité à prouver est claire car $u_k(x_k) = 0$. Supposons désormais que $x \in]x_k, x_{k+1}[$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$. En particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[x_k, x]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]x_k, x[$. Par conséquent, la formule de Taylor-Lagrange montre qu'il existe $c \in]x_k, x[$ tel que

$$f(x) = P_{k,n}(x) + f^{(n+1)}(c) \frac{(x - x_k)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Par conséquent,

$$|u_k(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x - x_k)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)| \frac{(x - x_k)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(c) D'après la relation de Chasles et la définition de $I(f)$, on a

$$\int_a^b f(x) \, dx - I(f) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \, dx - h I_k(f|_{[x_k, x_{k+1}]}) \right).$$

Mais pour tout $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ et $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $f(x) = u_k(x) + P_{k,n}(x)$. La linéarité de l'intégrale et de I_k conduisent alors à

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \, dx - I(f) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \, dx - h I_k(f|_{[x_k, x_{k+1}]}) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} u_k(x) \, dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} P_{k,n}(x) \, dx - h I_k(u_k) - h I_k(P_{k,n}) \right). \end{aligned}$$

Mais la méthode est d'ordre n et pour tout $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, $\deg(P_{k,n}) \leq n$, donc $h I_k(P_{k,n}) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} P_{k,n}(x) \, dx$. D'où

$$\int_a^b f(x) \, dx - I(f) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} u_k(x) \, dx - h I_k(u_k) \right).$$

- (d) Soit $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$. D'après la question 2b, pour tout $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $|u_k(x)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)| \frac{(x - x_k)^{n+1}}{(n+1)!}$.

D'où

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |u_k(x)| \, dx &\leq \sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x - x_k)^{n+1}}{(n+1)!} \, dx \\ &= \sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)| \left[\frac{(x - x_k)^{n+2}}{(n+2)!} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} \\ &= \sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)| \frac{h^{n+2}}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

Ainsi, la constante

$$C_1 := \frac{\sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)|}{(n+2)!}$$

convient.

- (e) Soit $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$. En utilisant l'inégalité triangulaire puis le résultat de la question 2b, on obtient

$$\begin{aligned} |I_k(u_k)| &= \left| \sum_{j=1}^m \alpha_j u_k(x_k + t_j) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^m |\alpha_j| |u_k(x_k + t_j)| \\ &\leq \sum_{j=1}^m |\alpha_j| \sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)| \frac{t_j^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\leq \left(\frac{\sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!} \sum_{j=1}^m |\alpha_j| \right) h^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc la constante

$$C_2 := \frac{\sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!} \sum_{j=1}^m |\alpha_j|$$

convient.

- (f) En combinant les résultats des trois questions précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \, dx - I(f) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} u_k(x) \, dx - h I_k(u_k) \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} |u_k(x)| \, dx + h |I_k(u_k)| \right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} (C_1 h^{n+2} + h C_2 h^{n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (C_1 + C_2) h^{n+2} \\ &= N(C_1 + C_2) \frac{(b-a)^{n+2}}{N^{n+2}} \\ &= (C_1 + C_2) \frac{(b-a)^{n+2}}{N^{n+1}}. \end{aligned}$$

Donc la constante $C := C_1 + C_2$ convient.

Exercice 3. 1. Déterminer l'unique fonction $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

- σ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$;
 - $\sigma(t) = 0$ pour $t \leq 0$;
 - $\sigma|_{[0, +\infty[}$ est une fonction polynomiale de degré au plus 3 ;
 - $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sigma^{(3)}(t) = 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soit $(t_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite strictement croissante d'éléments de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que
- s est de classe $\mathcal{C}^2$;
 - pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, la fonction $s|_{[t_i, t_{i+1}]}$ est polynomiale de degré au plus 3 ;
 - les fonctions $s|_{]-\infty, t_1]}$ et $s|_{[t_n, +\infty[}$ sont des fonctions polynomiales de degré au plus 1 ;
- (a) Montrer que tout $s \in \mathcal{S}$ vérifie une égalité de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, s(t) = \alpha + \beta t + \sum_{i=1}^n \gamma_i \sigma(t - t_i)$$

où $\alpha, \beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$.

- (b) En déduire que $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{R}$ -sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ puis déterminer sa dimension.

Indication : On pourra utiliser le fait que sur $[t_n, +\infty[$, la fonction polynomiale s n'est plus de degré 3 mais de degré 1.

3. Supposons $n = 3$, $t_1 = -1$, $t_2 = 0$ et $t_3 = 1$. Montrer qu'il existe une unique fonction $s \in \mathcal{S}$ vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, s(t_i) = t_i^2.$$

Dessiner les graphes de $t \mapsto t^2$ et s sur $[-2, 2]$.

4. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer qu'il existe une unique fonction $s \in \mathcal{S}$ vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, s(t_i) = f(t_i).$$

Solution :

1. Soit σ une telle fonction. Puisque σ est polynomiale de degré au plus 3 sur $[0, +\infty[$, il existe $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t \geq 0$, $\sigma(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$. On a alors $\sigma(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^-]{} 0$ et $\sigma(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} a_0$. Comme σ est continue, cela entraîne

$$a_0 = 0.$$

De plus, σ est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, pour tout $t < 0$, $\sigma'(t) = 0$ et pour tout $t > 0$, $\sigma'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$. Par conséquent, $\sigma'(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^-]{} 0$ et $\sigma'(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} a_1$. Comme σ est de classe $\mathcal{C}^1$, σ' est continue en 0, donc

$$a_1 = 0.$$

Le même raisonnement avec la dérivée seconde entraîne

$$a_2 = 0.$$

Enfin, σ est trois fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $t > 0$, $\sigma^{(3)}(t) = 6a_3$. Comme $\sigma^{(3)}(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 1$, on a

$$a_3 = \frac{1}{6}.$$

Ceci montre que la seule fonction pouvant satisfaire les conditions de l'énoncé est

$$\sigma : \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t < 0 & \longmapsto & 0 \\ t \geq 0 & \longmapsto & \frac{t^3}{6} \end{array}.$$

Réciproquement, montrons que cette fonction convient. La fonction σ est bien nulle sur $] -\infty, 0[$, polynomiale de degré 3 sur $[0, +\infty[$ et par conséquent trois fois dérivable sur $]0, +\infty[$, et pour tout $t > 0$,

$$\sigma^{(3)}(t) = \frac{6}{6} = 1 \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 1.$$

Il reste à justifier que σ est de classe $\mathcal{C}^2$. Pour cela, rappelons le théorème de prolongement de la dérivée.

Théorème 1 (prolongement de la dérivée). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si f' a une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a , alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$. Par conséquent, f est dérivable en a , $f'(a) = \ell$ et f' est continue en a .

La fonction σ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ car elle est polynomiale au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^*$. De plus, $\sigma(0) = 0$, pour tout $t < 0$, $\sigma(t) = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0^-} 0$ et pour tout $t > 0$, $\sigma(t) = \frac{t^3}{6} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$, donc σ est continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier. Enfin, pour tout $t < 0$, $\sigma'(t) = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0^-} 0$ et pour tout $t > 0$, $\sigma'(t) = \frac{t^2}{2} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$, donc $\sigma'(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$. D'après le théorème de prolongement de la dérivée, σ est dérivable en 0, $f'(0) = 0$ et f' est continue en 0. σ est donc de classe $\mathcal{C}^1$, pour tout $t \leq 0$, $\sigma'(t) = 0$ et pour tout $t > 0$, $\sigma'(t) = \frac{t^2}{3}$.

Le même travail sur σ' montre que σ' est de classe $\mathcal{C}^1$, donc que σ est de classe $\mathcal{C}^2$.

2. (a) Dans ce qui suit, on convient que $t_{n+1} = +\infty$. Soit $s \in \mathcal{S}$. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $\mathcal{P}(k)$: « il existe $\alpha, \beta, \gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t < t_{k+1}$, $s(t) = \alpha + \beta t + \sum_{i=1}^k \gamma_i \sigma(t - t_i)$ ».
- Comme s est polynomiale de degré au plus 1 sur $] -\infty, t_1]$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t < t_1$, $f(t) = \alpha + \beta t$, ce qui prouve $\mathcal{P}(0)$.
 - Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ et montrons $\mathcal{P}(k+1)$. La fonction

$$t < t_{k+2} \mapsto s(t) - \alpha - \beta t - \sum_{i=1}^k \gamma_i \sigma(t - t_i)$$

(où $\alpha, \beta, \gamma_1, \dots, \gamma_k$ proviennent de $\mathcal{P}(k)$) est de classe $\mathcal{C}^2$ (car somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$), nulle sur $] -\infty, t_{k+1}[$ d'après $\mathcal{P}(k)$ (et donc sur $] -\infty, t_{k+1}]$ puisqu'elle est continue), et polynomiale de degré au plus 3 sur $[t_{k+1}, t_{k+2}[$ (car somme de fonctions polynomiales de degré au plus 3 sur cet intervalle). Notons P ce polynôme et prolongeons la fonction précédente en une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ en posant $g(t) = P(t)$ pour $t \geq t_{k+2}$ ¹. Posons enfin $\tilde{\sigma}(t) = g(t + t_{k+1})$ pour $t \in \mathbb{R}$.

La fonction $\tilde{\sigma}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, nulle sur $] -\infty, 0]$ et polynomiale de degré au plus 3 sur $[0, +\infty[$. La fonction $\sigma^{(3)}$ est constante et admet donc une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en 0^+ . Si $\ell \neq 0$, alors la fonction $\frac{\tilde{\sigma}}{\ell}$ vérifie toutes les hypothèses de la question précédente, et c'est donc la fonction σ , par unicité. Si $\ell = 0$, on voit facilement en reprenant le raisonnement de la question précédente que $\tilde{\sigma}$ est la fonction nulle (reprendre la question précédente et voir que dans ce cas, $a_3 = 0$). Dans tous les cas, on pose $\gamma_{k+1} = \ell$, et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{\sigma}(t) = \gamma_{k+1} \sigma(t)$, par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \gamma_{k+1} \sigma(t - t_{k+1})$. En se restreignant à $t < t_{k+2}$, l'expression de g conduit à :

$$\forall t < t_{k+2}, \quad s(t) = \alpha + \beta t + \sum_{i=1}^{k+1} \gamma_i \sigma(t - t_i).$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

Par principe de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est vrai pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En particulier, $\mathcal{P}(n)$ montre qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$s(t) = \alpha + \beta t + \sum_{i=1}^n \gamma_i \sigma(t - t_i).$$

- (b) • $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par définition de $\mathcal{S}$.
- La fonction nulle appartient à $\mathcal{S}$ (elle est bien de classe $\mathcal{C}^2$ et polynomiale de degré $-\infty$ sur chacun des sous-intervalles considérés, donc bien de degré au plus 3 ou 1 (selon l'intervalle)).
 - Toute combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$, et pour tout $d \in \mathbb{N}$ toute combinaison linéaire de fonctions polynomiales de degré inférieur à d est une fonction polynomiale de degré inférieur à d . $\mathcal{S}$ est donc stable par combinaison linéaire.

$\mathcal{S}$ est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $s \in \mathcal{S}$. D'après la question précédente, il existe $\alpha, \beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$s(t) = \alpha + \beta t + \sum_{i=1}^n \gamma_i \sigma(t - t_i).$$

1. Si $k = n-1$, il n'y a rien à faire : puisque $t_{n+1} = +\infty$, la fonction est déjà définie sur $\mathbb{R}$

En prenant l'expression de σ sur $[0, +\infty[$, il vient :

$$\begin{aligned}\forall t \geq t_n, \quad s(t) &= \alpha + \beta t + \sum_{i=1}^n \gamma_i \sigma(t - t_i) \\ &= \alpha + \beta t + \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{(t - t_i)^3}{6} \\ &= \alpha + \beta t + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{6} (t^3 - 3t_i t^2 + 3t_i^2 t - t_i^3).\end{aligned}$$

Ceci est l'expression d'une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3 si et seulement si,

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n \gamma_i t_i = 0. \quad (1)$$

Notons

$$E = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \sum_{i=1}^n \gamma_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n \gamma_i t_i = 0 \right\}.$$

Il s'agit de l'intersection de deux hyperplans de $\mathbb{R}^{n+2}$ (c'est l'intersection des noyaux de deux formes linéaires non nulles) qui ne sont pas confondus (car, par exemple, $(0, 0, 1, -1, 0, \dots, 0)$ est dans l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^n \gamma_i = 0$ mais pas dans celui d'équation $\sum_{i=1}^n \gamma_i t_i = 0$ car $t_1 - t_2 \neq 0$). E est donc de dimension $n + 2 - 2 = n$.

Posons maintenant

$$\begin{aligned}\varphi : \quad E &\longrightarrow \mathcal{S} \\ (\alpha, \beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n) &\longmapsto \left(s : t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha + \beta t + \sum_{i=1}^n \gamma_i \sigma(t - t_i) \right).\end{aligned}$$

- La fonction φ est bien définie, autrement dit pour tout $x \in E$, $\varphi(x) \in \mathcal{S}$. En effet, il est clair par définition de σ que $\varphi(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$, que sur les sous-intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\varphi(x)$ est de degré au plus 3 et que sur $] -\infty, t_1]$, $\varphi(x)$ est affine ; quant au caractère affine de $\varphi(x)$ sur $[t_n, +\infty[$, il provient de la condition (1) et de la définition de E .
- φ est surjective. En effet, la question précédente et la condition (1) montrent que tout élément $s \in \mathcal{S}$ s'écrit sous la forme $s = \varphi(x)$ avec $x \in E$.
- Montrons que φ est injective. Soit $x = (\alpha, \beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \ker \varphi$. La nullité de $\varphi(x)$ sur $] -\infty, t_1]$ entraîne que $\alpha = \beta = 0$; puis sa nullité sur $[t_1, t_2]$ que $\gamma_1 = 0$, sur $[t_2, t_3]$ que $\gamma_2 = 0$ et ainsi de suite, puis enfin sa nullité sur $[t_n, +\infty[$ entraîne que $\gamma_n = 0$.

En conclusion, φ est un isomorphisme, donc

$$\dim \mathcal{S} = \dim E = n.$$

3. Soit $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}$. Posons

$$s : t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha + \beta t + \sum_{i=1}^3 \gamma_i \sigma(t - t_i).$$

La fonction s convient si et seulement si

$$\begin{cases} s \in \mathcal{S} \\ s(t_1) = t_1^2 \\ s(t_2) = t_2^2 \\ s(t_3) = t_3^2 \end{cases}.$$

En utilisant la condition (1) pour traduire $s \in \mathcal{S}$, l'expression de s et la nullité de σ sur $] -\infty, 0]$, ce système devient

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 \gamma_i = 0 \\ \sum_{i=1}^3 \gamma_i t_i = 0 \\ \alpha + \beta t_1 = t_1^2 \\ \alpha + \beta t_2 + \gamma_1 \sigma(t_2 - t_1) = t_2^2 \\ \alpha + \beta t_3 + \gamma_1 \sigma(t_3 - t_1) + \gamma_2 \sigma(t_3 - t_2) = t_3^2 \end{cases}.$$

En remplaçant par les données de l'énoncé et en résolvant ce système, on trouve

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{3}{2} \\ \gamma_1 = 3 \\ \gamma_2 = -6 \\ \gamma_3 = 3 \end{cases}.$$

La fonction est donc

$$s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \begin{aligned} t < -1 &\longmapsto -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}t \\ t \in [-1, 0[&\longmapsto -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}t + \frac{3}{6}(t+1)^3 \\ t \in [0, 1[&\longmapsto -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}t + \frac{3}{6}(t+1)^3 - \frac{6}{6}t^3 \\ t \geq 1 &\longmapsto -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}t + \frac{3}{6}(t+1)^3 - \frac{6}{6}t^3 + \frac{3}{6}(t-1)^3 \end{aligned}.$$

Voici les graphes en figure 1.

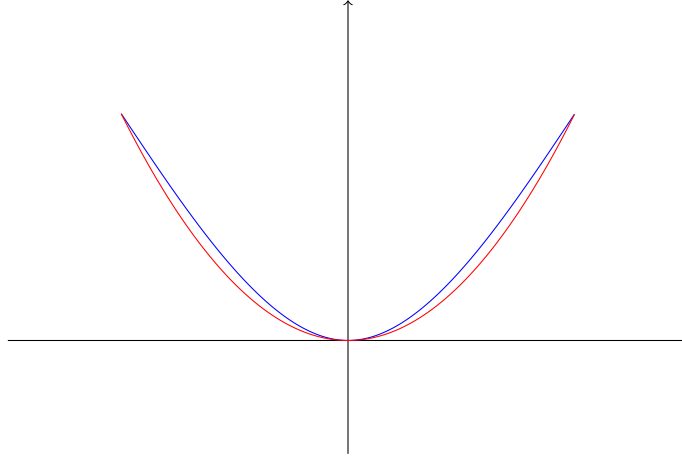


FIGURE 1 : En bleu : la fonction s . En rouge : la fonction $t \mapsto t^2$.

4. Je note $\mathcal{S}_{t_1, \dots, t_n}$ au lieu de $\mathcal{S}$ pour insister sur la dépendance en $t_1, \dots, t_n$.

Montrons que pour tout $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique fonction $s \in \mathcal{S}_{t_1, \dots, t_n}$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $s(t_i) = y_i$. Il suffira ensuite d'appliquer cela avec $(y_1, \dots, y_n) = (f(t_1), \dots, f(t_n))$. Au passage, le caractère $\mathcal{C}^2$ de f ne sert à rien. Le résultat que l'on souhaite prouver revient à la bijectivité de la fonction

$$\begin{aligned} \psi_{t_1, \dots, t_n} : \mathcal{S}_{t_1, \dots, t_n} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ s &\longmapsto (s(t_1), \dots, s(t_n)) \end{aligned}.$$

Il s'agit d'une fonction linéaire entre deux espaces de même dimension n car $\dim \mathcal{S}_{t_1, \dots, t_n} = n$ d'après la question 2. Il suffit donc de prouver l'injectivité de $\psi_{t_1, \dots, t_n}$, c'est-à-dire que son noyau est $\{0\}$. Pour cela, on procède par récurrence sur n en posant, pour $n \geq 2$, $\mathcal{P}(n)$: « pour tout $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $t_1 < \dots < t_n$, $\ker \psi_{t_1, \dots, t_n} = \{0\}$ ».

- **Initialisation** : Soit $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $t_1 < t_2$. Soit $s \in \ker \psi_{t_1, t_2}$. La fonction s est de classe $\mathcal{C}^2$, et comme s est affine sur $] -\infty, t_1[$ et sur $[t_2, +\infty[$ et polynomiale de degré au plus 3 sur $[t_1, t_2]$, s'' est nulle sur $\mathbb{R} \setminus]t_1, t_2[$ et affine sur $[t_1, t_2]$. La nullité de s'' sur $\mathbb{R} \setminus]t_1, t_2[$ entraîne en particulier que $s''(t_1) = s''(t_2) = 0$, ce qui, combiné avec son caractère affine sur $[t_1, t_2]$, montre qu'elle y est nulle. En conclusion, s'' est nulle sur $\mathbb{R}$, donc s est affine sur $\mathbb{R}$, et comme $s(t_1) = s(t_2) = 0$, s est bien nulle sur $\mathbb{R}$.

- **Hérédité** : Soit $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Soit $(t_1, \dots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $t_1 < \dots < t_{n+1}$. Soit $s \in \ker \psi_{t_1, \dots, t_{n+1}}$.

Comme dans l'initialisation, s'' est nulle sur $] -\infty, t_1[\cup [t_{n+1}, +\infty[$ et affine sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La fonction s étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $[t_i, t_{i+1}]$ et dérivable sur $]t_i, t_{i+1}[$. Comme $s(t_i) = 0 = s(t_{i+1})$, le théorème de Rolle montre qu'il existe $u_i \in]t_i, t_{i+1}[$ tel que

$s'(u_i) = 0$. De la même manière, en appliquant le théorème de Rolle à s' (qui est de classe $\mathcal{C}^1$) entre les u_i successifs, on obtient $v_1 < \dots < v_{n-1} \in]t_1, t_{n+1}[$ tels que $s''(v_i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. En ajoutant $s''(t_1) = s''(t_{n+1})$, cela fait $n+1$ zéros de s'' dans $[t_1, t_{n+1}]$.

Les intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ étant au nombre de n , au moins l'un d'entre eux, disons $[t_{i_0}, t_{i_0+1}]$, contient deux zéros de s'' . Comme s'' est affine sur $[t_{i_0}, t_{i_0+1}]$, elle y est nulle, donc s est elle-même affine sur $[t_{i_0}, t_{i_0+1}]$. Mais $s(t_{i_0}) = s(t_{i_0+1}) = 0$, donc s est nulle sur $[t_{i_0}, t_{i_0+1}]$. Distinguons alors quelques cas.

- Si $i_0 = 1$, alors le recollement $\mathcal{C}^2$ entre la partie affine de s sur $] -\infty, t_1]$ et sa partie nulle sur $[t_1, t_2]$ entraîne que s est nulle sur $] -\infty, t_2]$. Elle y est en particulier affine, ce qui montre que $s \in \mathcal{S}_{t_2, \dots, t_{n+1}}$. On a alors $s \in \ker \psi_{t_2, \dots, t_{n+1}}$, donc d'après $\mathcal{P}(n)$, s est la fonction nulle.
- De même, si $i_0 = n$, alors en utilisant le recollement en t_n , on montre que s est nulle sur $[t_n, +\infty[$, donc $s \in \ker \psi_{t_1, \dots, t_n}$, ce qui entraîne que s est la fonction nulle d'après $\mathcal{P}(n)$.
- Reste le cas où $1 < i_0 < n$. Notons que cela impose $n \geq 3$. Posons

$$\begin{array}{rcl} \tilde{s}_1 & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & t < t_{i_0} \longmapsto s(t) \\ & & t \geq t_{i_0} \longmapsto 0 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \tilde{s}_2 & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & t > t_{i_0+1} \longmapsto s(t) \\ & & t \leq t_{i_0+1} \longmapsto 0 \end{array} .$$

On a alors $\tilde{s}_1 \in \mathcal{S}_{t_1, \dots, t_{i_0}}$. En effet, le caractère affine et polynomial de degré 3 par morceaux de $\tilde{s}_1$ découle de celui de s ; $\tilde{s}_1$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] -\infty, t_{i_0}[$ car s l'est, elle l'est évidemment sur $]t_{i_0}, +\infty[$, et elle l'est au voisinage de t_{i_0} car elle coïncide avec s au voisinage de t_{i_0} puisque s est nulle sur $[t_{i_0}, t_{i_0+1}]$. On en déduit que $\tilde{s}_1 \in \ker \psi_{t_1, \dots, t_{i_0}}$, ce qui entraîne que $\tilde{s}_1$ est nulle par $\mathcal{P}(i_0)$. De même, $\tilde{s}_2 \in \ker \psi_{t_{i_0+1}, \dots, t_{n+1}}$, ce qui entraîne que $\tilde{s}_2$ est nulle par $\mathcal{P}(n - i_0 + 1)$.

Comme $\tilde{s}_1$ est nulle, s l'est sur $] -\infty, t_{i_0}[$. Comme $\tilde{s}_2$ est nulle, s l'est sur $]t_{i_0+1}, +\infty[$. Enfin, on a déjà vu que s est nulle sur $[t_{i_0}, t_{i_0+1}]$. Donc s est nulle, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$ et achève la preuve par récurrence.

Problème. Soient $q, p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions inconnues et (q_0, p_0) un point de $\mathbb{R}^2$. On considère le système différentiel suivant

$$\begin{cases} q'(t) &= p(t) \\ p'(t) &= -q(t) \end{cases} \quad (2)$$

avec la condition initiale $(q(0), p(0)) = (q_0, p_0)$.

Existence et unicité de la solution

1. Écrire le système (2) sous la forme $Y' = F(t, Y)$ où $Y := (q, p)$.
2. Montrer que la fonction F obtenue dans la question précédente est (globalement) lipschitzienne par rapport à la seconde variable.
3. En déduire que pour toute donnée initiale $(q_0, p_0) \in \mathbb{R}^2$, le système (2) admet une unique solution globale $(q, p) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.
4. Calculer explicitement la solution du système (2) pour $(q_0, p_0) = (0, 1)$.
On pourra calculer q'' .

Conservation de l'hamiltonien

On considère la fonction H définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$H(x, y) := \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Cette fonction est l'*hamiltonien* associé à l'équation (2).

1. Soient $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Montrer que $t \mapsto H(q(t), p(t))$ est dérivable et calculer sa dérivée.
2. On considère (q, p) l'unique solution du système (2) telle que $(q(0), p(0)) = (q_0, p_0)$. Montrer que la fonction $t \mapsto H(q(t), p(t))$ est constante.

Dans toute la suite, on considère $0 < h < 1$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n := nh$.

On cherche à approcher la solution $(q(t), p(t))$ du système (2) aux temps discrets t_n à l'aide de deux méthodes numériques différentes. On introduit pour cela des suites $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$q_n \approx q(t_n), \quad p_n \approx p(t_n).$$

Euler explicite

1. Rappeler le schéma d'Euler explicite associé à la subdivision $t_0 < \dots < t_n$ pour une fonction y solution de

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

2. En admettant que ce schéma se généralise aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, en déduire le schéma d'Euler explicite associé au système (2).

On notera $((q_n, p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de $\mathbb{R}^2$ ainsi obtenue.

3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$H(q_{n+1}, p_{n+1}) = (1 + h^2) H(q_n, p_n).$$

(b) En déduire que la suite $(H(q_n, p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge lorsque $n \rightarrow \infty$ si $(p_0, q_0) \neq (0, 0)$.

(c) Ce résultat semble-t-il cohérent avec celui obtenu à la question 2. de la partie précédente ?

Euler symplectique

On considère maintenant le schéma d'Euler symplectique défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} p_{n+1} &= p_n - h q_n \\ q_{n+1} &= q_n + h p_{n+1} \end{cases}.$$

1. Calculer (q_1, p_1) en fonction de (q_0, p_0) . Dans quel ordre doit-on calculer les approximations ?

2. **Conservation d'une quantité proche de l'énergie**

On considère la fonction modifiée $\widetilde{H}_h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \widetilde{H}_h(x, y) := H(x, y) - \frac{h}{2} xy$$

où H est l'hamiltonien défini dans la partie précédente. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\widetilde{H}_h(q_n, p_n) = \widetilde{H}_h(q_0, p_0).$$

En déduire que les points (q_n, p_n) restent sur une courbe fermée du plan.

3. **Variation de l'énergie classique**

(a) Montrer que pour le schéma d'Euler symplectique, l'énergie classique n'est pas exactement conservée, mais que sa variation à chaque pas est de l'ordre h^2 , c'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$H(q_{n+1}, p_{n+1}) = H(q_n, p_n) + h^2 u_n$$

où h est le pas de temps et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite qui dépend de h et des suites $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

(c) En déduire que le schéma d'Euler symplectique est plus adapté à la simulation à long terme du système (2).

4. **Simulation Python**

Écrire un programme Python qui implémente le schéma d'Euler symplectique.

Solution : **Existence et unicité de la solution**

1. Posons $Y = (q, p)$. Le système s'écrit sous la forme $Y' = F(t, Y)$ avec

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (t, (v, u)) & \longmapsto & (u, -v) \end{array}.$$

2. La fonction F est linéaire entre espaces de dimension finie, donc lipschitzienne (et en particulier par rapport à sa seconde variable).

Voici une autre version pour les L2 qui n'ont pas accès à cet argument. Notons $\|\cdot\|$ la norme sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\|(x, y)\| := \max(|x|, |y|)$. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}\|F(t, (u_1, v_1)) - F(t, (u_2, v_2))\| &= \|(u_1 - u_2, -v_1 + v_2)\| \\ &= \max(|u_1 - u_2|, |v_2 - v_1|) \\ &= \|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\| \\ &= \|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|.\end{aligned}$$

Par conséquent, F est 1-lipschitzienne par rapport à sa seconde variable.

3. La fonction F est continue et globalement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz global, quelle que soit la condition initiale, le problème de Cauchy admet une unique solution globale de classe $\mathcal{C}^1$.
4. Soit $Y = (q, p)$ la solution du problème de Cauchy. Alors $q' = p$ et $p' = -q$, donc $q'' = p' = -q$. D'après le cours de première année, les solutions de cette équation sont les combinaisons linéaires de $\cos$ et $\sin$, donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $q = \lambda \cos + \mu \sin$. Comme $q(0) = 0$, on a $\lambda = 0$, donc $q = \mu \sin$. Mais $q'(0) = p(0) = 1$, autrement dit $\mu \cos(0) = 1$, d'où $\mu = 1$. Ainsi, $q = \sin$. Puis, comme $p = q'$, on a $p = \cos$. La solution est donc

$$Y : t \in \mathbb{R} \mapsto (\sin(t), \cos(t)).$$

Conservation de l'hamiltonien

1. Comme les fonctions q et p sont dérivables, la fonction $\frac{1}{2}(q^2 + p^2)$ est dérivable (par produit et combinaison linéaire de fonctions dérivables) et sa dérivée est la fonction

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}(2q'(t)q(t) + 2p'(t)p(t)),$$

c'est-à-dire la fonction

$$t \in \mathbb{R} \mapsto q'(t)q(t) + p'(t)p(t).$$

2. En utilisant $q' = p$ et $p' = -q$, la dérivée précédente devient la fonction

$$t \in \mathbb{R} \mapsto p(t)q(t) - q(t)p(t),$$

c'est-à-dire la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto H(q(t), p(t))$ étant dérivable de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, elle y est constante.

Euler explicite

1. Le schéma d'Euler explicite est donné par la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par y_0 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

2. Les suites $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont données par q_0 et p_0 et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix} + hF(t_n, (q_n, p_n)),$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_n + hp_n \\ p_n - hq_n \end{pmatrix}.$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}H(q_{n+1}, p_{n+1}) &= \frac{1}{2}(q_{n+1}^2 + p_{n+1}^2) \\ &= \frac{1}{2}((q_n + hp_n)^2 + (p_n - hq_n)^2) \\ &= \frac{1}{2}(q_n^2 + 2hq_n p_n + h^2 p_n^2 + p_n^2 - 2p_n hq_n + h^2 q_n^2) \\ &= \frac{1}{2}(q_n^2 + h^2 p_n^2 + p_n^2 + h^2 q_n^2) \\ &= \frac{1}{2}(q_n^2 + p_n^2) + \frac{h^2}{2}(p_n^2 + q_n^2) \\ &= H(q_n, p_n) + h^2 H(q_n, p_n) \\ &= (1 + h^2) H(q_n, p_n).\end{aligned}$$

(b) La suite $(H(q_n, p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $1 + h^2$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$H(q_n, p_n) = (1 + h^2)^n H(q_0, p_0).$$

Comme $1 + h^2 > 0$, $(1 + h^2)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. De plus, si $(q_0, p_0) \neq (0, 0)$, alors $H(q_0, p_0) = q_0^2 + p_0^2 > 0$.

On a alors $H(q_n, p_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

(c) L'hamiltonien de la vraie solution est constant, alors que celui de son approximation par la méthode d'Euler explicite diverge. C'est signe que l'approximation n'est pas bonne.

Euler symplectique

1. On commence par calculer

$$p_1 = p_0 - hq_0$$

puis on en déduit

$$q_1 = q_0 + hp_1 = q_0 + h(p_0 - hq_0) = (1 - h^2)q_0 + hp_0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le même calcul qu'à la question précédente montre que

$$p_{n+1} = p_n - hq_n \quad \text{et} \quad q_{n+1} = (1 - h^2)q_n + hp_n.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_h(q_{n+1}, p_{n+1}) &= \frac{1}{2} \left((p_n - hq_n)^2 + ((1 - h^2)q_n + hp_n)^2 - \frac{h}{2} (p_n - hq_n) ((1 - h^2)q_n + hp_n) \right) \\ &= \frac{1}{2} (p_n^2 - 2hp_nq_n + h^2q_n^2 + (1 - h^2)^2q_n^2 + 2h(1 - h^2)q_np_n + h^2p_n^2 - h(1 - h^2)p_nq_n \\ &\quad - h^2p_n^2 + h^2(1 - h^2)q_n^2 + h^3p_nq_n) \\ &= \frac{1}{2} \left(p_n^2 \underbrace{(1 - h^2 + h^2)}_{=1} + q_n^2 \underbrace{(h^2 + (1 - h^2)^2 + h^2(1 - h^2))}_{=1} - q_np_n \underbrace{(2h - 2h(1 - h^2) + h(1 - h^2) - h^3)}_{=h} \right) \\ &= \frac{q_n^2 + p_n^2}{2} - \frac{h}{2} q_np_n \\ &= \widetilde{H}_h(q_n, p_n). \end{aligned}$$

La suite est donc constante, égale à $\widetilde{H}_h(q_0, p_0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'égalité précédente se réécrit en :

$$q_n^2 + p_n^2 - hp_nq_n - q_0^2 - p_0^2 + hq_0p_0 = 0.$$

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (q_n, p_n) appartient à la conique d'équation

$$x^2 + y^2 - hxy - q_0^2 - p_0^2 + hq_0p_0 = 0.$$

On la réécrit en

$$\left(x - \frac{h}{2}y\right)^2 + \left(1 - \frac{h^2}{4}\right)y^2 = \left(q_0 - \frac{h}{2}p_0\right)^2 + \left(1 - \frac{h^2}{4}\right)p_0^2,$$

qui est l'équation d'une ellipse puisque, h étant compris entre 0 et 1, on a $1 - \frac{h^2}{4} > 0$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} H(q_{n+1}, p_{n+1}) &= \frac{1}{2} ((p_n - hq_n)^2 + (q_n + hp_n - h^2q_n)^2) \\ &= \frac{1}{2} (p_n^2 + q_n^2 - 2hp_nq_n + h^2q_n^2 + h^2p_n^2 + h^4q_n^2 + 2q_nhp_n - 2h^2q_n^2 - 2h^3p_nq_n) \\ &= H(q_n, p_n) + h^2 \frac{(h^2 - 1)q_n^2 + p_n^2 - 2hp_nq_n}{2}. \end{aligned}$$

On pose donc, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{(h^2 - 1)q_n^2 + p_n^2 - 2hp_nq_n}{2}.$$

(b) Par inégalité triangulaire et en utilisant $h \in]0, 1[$, on a

$$|u_n| \leq \frac{1-h^2}{2} q_n^2 + p_n^2 + h|p_n q_n| \leq \frac{q_n^2}{2} + p_n^2 + |p_n q_n|.$$

Mais comme la suite $((q_n, p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans une ellipse, elle est bornée. Par conséquent les suites $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont elles aussi bornées. Prenant une constante $M > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|q_n| \leq M$ et $|p_n| \leq M$, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq \frac{5}{2} M^2.$$

(c) Pour l'hamiltonien classique, l'analogue de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite $(H(q_n, p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ d'après la question 3.(a) de la partie précédente. Cette suite n'est pas bornée (elle diverge vers $+\infty$). La variation à chaque pas de la méthode d'Euler symplectique est donc négligeable devant celle de la méthode d'Euler explicite. Comme la vraie solution conserve cette énergie classique, c'est un indice de la supériorité d'Euler symplectique pour la résolution numérique de cette équation différentielle.

4. Il s'agit du même algorithme que pour la méthode d'Euler explicite vue en TP, en changeant l'itération.