Fonctions à deux variables

Contrôle continu

Durée : 1h00.
Toute réponse doit être justifiée.
Le correcteur tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.
Les appareils électroniques et tout document sont interdits.

Exercice 1.
1. Donner la définition de différentiabilité d'une fonction $U \to \mathbb{R}$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$) en $a \in U$.
2. Montrer qu'une fonction $U \to \mathbb{R}$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$) différentiable en $a \in U$ est continue en $a \in U$.

Exercice 2. Soient $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \coloneqq \begin{cases} \frac{x^a y^b}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Calculer la matrice jacobienne de f en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit différentiable.

Exercice 3. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto f(tx,ty) \in \mathbb{R}$ est dérivable et calculer sa dérivée.
2. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(tx,ty) = tf(x,y)$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, f(x,y) = x\partial_x f(tx,ty) + y\partial_y f(tx,ty).$$
   (b) En déduire que f est linéaire.

Exercice 4. Le but de cet exercice est de résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$y\partial_x f(x,y) - x\partial_y f(x,y) = f(x,y) \tag{1}$$

avec $f\colon \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
1. Trouver la partie A de $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ telle que la fonction $\Phi : A \to \mathbb{R}\times]0,+\infty[$ définie par
   $$\forall (r,\theta) \in A, \Phi(r,\theta) \coloneqq (r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$
   soit une bijection.
2. Déterminer sa bijection réciproque.
3. Soit $f\colon \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
   (a) Montrer que $g \coloneqq f \circ \Phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A.
   (b) Montrer que f est une solution de (1) si, et seulement si, $\forall (r,\theta) \in A, \partial_\theta g(r,\theta) = -g(r,\theta)$.
   (c) En déduire les solutions de (1). *On pourra considérer la fonction $g(r,\cdot)$ avec la variable r fixée puis résoudre l'équation différentielle associée.*

Exercice 5 (4*0.5=2)**.** Pour chacune des lettres grecques suivantes, donner son nom en français et préciser s'il s'agit d'une minuscule ou d'une majuscule :

1. ι 2. P 3. Λ 4. ν