

# Fonctions à deux variables

## Contrôle continu

Durée : 1h00.

Toute réponse doit être justifiée.

Le correcteur tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.

Les appareils électroniques et tout document sont interdits.

### Exercice 1.

1. Donner la définition de différentiabilité d'une fonction  $U \rightarrow \mathbb{R}$  (où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ) en  $a \in U$ .
2. Montrer qu'une fonction  $U \rightarrow \mathbb{R}$  (où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ) différentiable en  $a \in U$  est continue en  $a \in U$ .

*Solution :*

1. Une fonction  $U \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable en  $a \in U$  s'il existe une application linéaire  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et une fonction  $\varepsilon: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  et

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, a + h \in U \Rightarrow f(a + h) = f(a) + L(h) + \|h\|\varepsilon(h).$$

2. Soit  $f$  une fonction différentiable en  $a$ . Notons  $\varepsilon$  la fonction telle que

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, a + h \in U \Rightarrow f(a + h) = f(a) + d_a f(h) + \|h\|\varepsilon(h).$$

Comme  $d_a f$  est une application linéaire alors elle est continue et donc  $d_a f(h) \rightarrow d_a f(0) = 0$ . De plus, par définition,  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  et  $\|h\| \rightarrow 0$ . On en conclut donc  $f(a + h) \rightarrow f(a)$ , ce qui montre la continuité de  $f$  en  $a$ .

**Exercice 2.** Soient  $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^a y^b}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Calculer la matrice jacobienne de  $f$  en tout point de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $a$  et  $b$  pour que  $f$  soit différentiable.

*Solution :*

1. La fonction  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  comme quotient de fonctions  $\mathcal{C}^1$  (car polynomiales) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a, pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,

$$\partial_x f(x, y) = \frac{ax^{a-1}y^b(x^2 + y^2) - x^a y^b(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{(a-2)x^{a+1}y^b + ax^{a-1}y^{b+2}}{(x^2 + y^2)^2}$$

et

$$\partial_y f(x, y) = \frac{x^a b y^{b-1}(x^2 + y^2) - x^a y^b(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{(b-2)x^a y^{b+1} + bx^{a+2} y^{b-1}}{(x^2 + y^2)^2}$$

La matrice jacobienne de  $f$  en  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  est donc

$$\left( \frac{(a-2)x^{a+1}y^b + ax^{a-1}y^{b+2}}{(x^2 + y^2)^2} \quad \frac{(b-2)x^a y^{b+1} + bx^{a+2} y^{b-1}}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

2. Par la question précédente, on sait que  $f$  est différentiable en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Il ne reste juste à étudier la différentiabilité en  $(0, 0)$ .

On peut remarquer que les dérivées partielles existent toujours (car  $a \neq 0 \neq b$ ) :

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0 \rightarrow 0$$

et

$$\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0 \rightarrow 0$$

On a donc  $\partial_x f(0, 0) = \partial_y f(0, 0) = 0$ .

Supposons que  $f$  est différentiable en  $(0, 0)$ . Alors  $d_{(0,0)}f$  est nulle et donc pour  $h \in \mathbb{R}^2$

$$f(h) = \|h\|\varepsilon(h)$$

avec  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ . Autrement dit, la fonction  $h \mapsto \frac{f(h)}{\|h\|}$  tend vers 0 en 0.

On peut remarquer que, pour tout  $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,

$$\frac{f(h)}{\|h\|} \leq \sqrt{2} \frac{h_1^a h_2^b}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}}$$

car  $\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \leq \sqrt{2}\|h\|$

On passe en coordonnées polaires : pour  $r > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\left| \frac{f(h)}{\|h\|} \right| \leq \sqrt{2} \frac{|r^{a+b} \cos(\theta)^a \sin(\theta)^b|}{(r^2)^{3/2}} \leq \sqrt{2} r^{a+b-3}$$

On en déduit donc que si  $a + b > 3$  alors  $\frac{f(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ . Comme

$$f(0 + h) = f(0) + \partial_x f(0, 0)h_1 + \partial_y f(0, 0)h_2 + \|h\| \frac{f(h)}{\|h\|}$$

alors  $f$  est différentiable en  $(0, 0)$ .

Si  $a + b \leq 3$  alors  $\frac{f(h)}{\|h\|}$  ne tend pas vers  $(0, 0)$  : prenons le chemin  $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (t, t)$ . Alors, pour  $t \neq 0$ , on a :

$$\frac{f(\gamma(t))}{\|\gamma(t)\|} = \frac{t^a t^b}{|t|(t^2 + t^2)} = \frac{t^{a+b-2}}{2|t|}$$

Si  $a + b \leq 2$  alors la limite est infinie et si  $a + b = 3$  alors la limite à gauche est  $-\frac{1}{2}$  et la limite à droite est  $\frac{1}{2}$ . Dans les deux cas, la limite n'est pas nulle. On en déduit alors que  $f$  n'est pas différentiable.

En conclusion, on a montré que  $f$  est différentiable si, et seulement si,  $a + b > 3$ .

**Exercice 3.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

1. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que la fonction  $t \in \mathbb{R} \mapsto f(tx, ty) \in \mathbb{R}$  est dérivable et calculer sa dérivée.
2. On suppose que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(tx, ty) = tf(x, y)$ .
  - (a) Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, f(x, y) = x\partial_x f(tx, ty) + y\partial_y f(tx, ty).$$

- (b) En déduire que  $f$  est linéaire.

*Solution :*

1. La fonction  $g : t \in \mathbb{R} \mapsto f(tx, ty) \in \mathbb{R}$  est dérivable comme composée d'une fonction différentiable et d'une fonction dérivable. On a alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = d_{(tx, ty)}f(x, y) = \partial_x f(tx, ty)x + \partial_y f(tx, ty)y$$

2. (a) Sous les hypothèses de l'énoncé, la fonction  $g$  est linéaire et donc pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $t \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f(x, y) = g'(t) = \partial_x f(tx, ty)x + \partial_y f(tx, ty)y. \quad (*)$$

(b) En évaluant  $t$  en 0 dans (\*), on obtient, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$f(x, y) = \partial_x f(0, 0)x + \partial_y f(0, 0)y.$$

Ainsi,  $f$  est une fonction linéaire.

**Exercice 4.** Le but de cet exercice est de résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$y\partial_x f(x, y) - x\partial_y f(x, y) = f(x, y) \quad (1)$$

avec  $f: \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

1. Trouver la partie  $A$  de  $]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[$  telle que la fonction  $\Phi: A \rightarrow \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$  définie par

$$\forall (r, \theta) \in A, \Phi(r, \theta) := (r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

soit une bijection.

2. Déterminer sa bijection réciproque.

3. Soit  $f: \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

(a) Montrer que  $g := f \circ \Phi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $A$ .

(b) Montrer que  $f$  est une solution de (1) si, et seulement si,  $\forall (r, \theta) \in A, \partial_\theta g(r, \theta) = -g(r, \theta)$ .

(c) En déduire les solutions de (1). On pourra considérer la fonction  $g(r, \cdot)$  avec la variable  $r$  fixée puis résoudre l'équation différentielle associée.

*Solution :*

1. On sait que  $\tilde{\Phi}: (r, \theta) \in ]0, \infty[ \times ]-\pi, \pi[ \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  est une bijection. On en déduit donc que  $A = \tilde{\Phi}^{-1}(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[)$ . Puisqu'on a les équivalences suivantes pour  $(r, \theta) \in ]0, \infty[ \times ]-\pi, \pi[$ ,

$$(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \Leftrightarrow \sin(\theta) > 0 \Leftrightarrow \theta \in ]0, \pi[,$$

on en déduit que  $A = ]0, \infty[ \times ]0, \pi[$

2. Soient  $(x, y) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$  et  $(r, \theta) \in A$ . Alors on a les équivalences suivantes :

$$\Phi(r, \theta) = (x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \begin{matrix} y \geq 0 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} \theta = \text{Arccos}\left(\frac{x}{r}\right) \\ y = \sqrt{r^2 - x^2} \end{cases} \begin{matrix} r \geq 0 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} \theta = \text{Arccos}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ r = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

car  $\text{Arccos}$  est la bijection réciproque de  $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ . On en déduit donc que l'inverse de  $\Phi$  est :

$$(x, y) \mapsto \left( \sqrt{x^2 + y^2}, \text{Arccos}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right)$$

3. (a) La fonction  $\Phi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . La fonction  $g$  est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  comme composée de fonctions  $\mathcal{C}^1$ .

(b) On calcule  $\partial_\theta g(r, \theta)$  (qui existe grâce à la question précédente) pour  $(r, \theta) \in A$  :

$$\begin{aligned} \partial_\theta g(r, \theta) &= \partial_\theta \Phi_1(r, \theta) \partial_x f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \Phi_2(r, \theta) \partial_y f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \\ &= -r \sin(\theta) \partial_x f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + r \cos(\theta) \partial_y f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{aligned}$$

où  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ .

On en déduit que les assertions suivantes sont équivalentes :

i.  $f$  est solution de (1) ;

ii.  $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[, y\partial_x f(x, y) - x\partial_y f(x, y) = f(x, y)$  ;

iii.  $\forall (r, \theta) \in A, r \sin(\theta) \partial_x f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) - r \cos(\theta) \partial_y f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$  ;

iv.  $\forall (r, \theta) \in A, -\partial_\theta g(r, \theta) = g(r, \theta)$  (\*\*)

L'équivalence entre ii. et iii. vient du fait que  $\Phi: A \rightarrow \mathbb{R} \times ]0, \infty[$  est une bijection et l'équivalence entre iii. et iv. vient du calcul précédent.

(c) Soient  $r > 0$  et posons  $h_r : \theta \mapsto g(r, \theta)$ . La dernière équivalence devient donc

$$\forall r > 0, h'_r = -h_r$$

On peut maintenant résoudre cette équation : ces solutions sont les fonctions  $h_r : \theta \mapsto C_r e^{-\theta}$  avec  $C_r \in \mathbb{R}$ . On peut calculer explicitement  $C_r$  en fonction  $g_r : C_r = h_r(0) = g(0, \cdot)$ . On en déduit donc que  $r \mapsto C_r$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  (par composition).

On en déduit que si  $g$  vérifie (\*\*\*) alors il existe une fonction  $C : ]0, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que

$$\forall (r, \theta) \in A, g(r, \theta) = C(r)e^{-\theta}$$

Réciproquement, cela définit bien une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  solution de (\*\*).

Comme  $\Phi^{-1}$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  alors  $f = g \circ \Phi^{-1}$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  solution de (1) si, et seulement si,  $g$  est solution de (\*\*).

On en déduit donc que l'ensemble des solutions de (1) est

$$\left\{ (x, y) \mapsto C(\sqrt{x^2 + y^2}) e^{-\text{Arccos}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)} \mid C : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \right\}$$

**Exercice 5** (4\*0.5=2). Pour chacune des lettres grecques suivantes, donner son nom en français et préciser s'il s'agit d'une minuscule ou d'une majuscule :

1.  $\iota$

2.  $P$

3.  $\Lambda$

4.  $\nu$

*Solution :*

1. iota minuscule

2. rho majuscule

3. lambda majuscule

4. nu minuscule