L3 PPPE
2024-2025

Suites et Séries

Contrôle continu

Durée : 2h30.
Toute réponse doit être justifiée.
Le correcteur tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.
Les appareils électroniques et tout document sont interdits.

Exercice 1. 1. Énoncer le critère de Cauchy et donner une démonstration d'un cas où ce critère permet de conclure.

2. Donner une définition (ou une caractérisation complète) du rayon de convergence d'une série entière.

3. Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel $\ell \neq 0$. Que peut-on dire de la nature de $\sum u_n$? Et si $\ell = 0$? Dans les deux cas, donner un exemple des cas possibles (on ne demande pas de les justifier).

Exercice 2. Montrer que la série $\sum \left(1 - \frac{1}{2\pi}\right)^n$ converge et donner sa somme.

Exercice 3. Montrer la convergence des séries suivantes :

$$\sum \frac{\sqrt{3n}}{2^n}, \quad \sum_{n\geq 1} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right), \quad \sum_{n\geq 1} \ln(n) n^{42} e^{-\sqrt{n}}.$$

Exercice 4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$ en fonction des valeurs de α.
Indication : On pourra commencer par examiner le cas $\alpha = 2$.

Exercice 5. 1. On considère la série $\sum \frac{1}{e^n + e^{-n}}$.

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{e^k + e^{-k}} \leq e^{-k}$.

(b) Déduire que la série converge.

2. On considère la série $\sum \frac{2n^2}{n^3 - \frac{1}{2}}$.

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\frac{2k^2}{k^3 - \frac{1}{2}} \geq \frac{2}{k}$.

(b) Déduire la nature de la série.

Exercice 6. On définit la fonction $f\colon x \in [2; +\infty[\longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que, pour tout réel $x \geq 2$:

$$\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

2. Pour tout entier $n \geq 2$, on définit l'intégrale :

$$I_n = \int_2^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Démontrer que : $\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

(b) On définit la fonction

$$F\colon x \in [2;+\infty[\longmapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \in \mathbb{R}.$$

Calculer la dérivée de F, et en déduire une expression de I_n en fonction de n.

(c) Montrer que $I_n - \ln(n)$ converge vers un nombre réel.
On pourra noter cette valeur ℓ et continuer l'exercice sans avoir fait cette question.

3. On définit, pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}.$$

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\ \mathrm{d}x \leq f(n)$.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ I_{n+1} \leq S_n \leq I_n + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(c) Trouver un équivalent simple de S_n.

Exercice 7. 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ en fonction des valeurs de α.

2. Montrer que $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ est convergente mais pas absolument convergente.

Exercice 8. 1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{\sqrt{e^n-1}} x^n$.

2. Donner le rayon de convergence des séries entières $\sum \frac{n-1}{n!} x^n$ et $\sum \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$ puis calculer leur somme. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n!} \ln(3)^n = \ln\left(\frac{27}{e^3}\right)$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} \left(\sqrt{2}\right)^n = 0$$

Indication : On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.