L3 PPPE
2025-2026

Suites et séries numériques

Contrôle continu

Durée : 2h30.
Toute réponse doit être justifiée.
Le correcteur tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.
Les appareils électroniques et tout document sont interdits.

Exercice 1.

1. Énoncer le critère de Cauchy et donner un exemple pour chacun des cas de ce critère.
2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Montrer que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
3. Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Montrer que si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n + v_n$ diverge.

Exercice 2.

1. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?

Pour de tels α, on note $\zeta(\alpha)$ la somme de cette série :

$$\zeta(\alpha) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [n, n+1]$,

$$\frac{1}{(x+1)^\alpha} \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

3. En déduire que

$$\int_1^\infty \frac{1}{(x+1)^\alpha} \mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x$$

puis que

$$1 + \int_1^\infty \frac{1}{(x+1)^\alpha} \mathrm{d}x \leq \zeta(\alpha) \leq 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x$$

4. En déduire la limite de $(\alpha - 1)\zeta(\alpha)$ pour $\alpha \to 1$.

Exercice 3. Déterminer la nature des séries des termes généraux suivants

1. $u_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \sin\left(\frac{1}{n}\right), \ n \geq 1$
2. $v_n = \dfrac{n!}{n^n}, \ n \geq 1$
3. $w_n = \ln(n+1)n^3 e^{-n}$
4. $t_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}$

Exercice 4. Soient (a_k) et (b_k) deux suites.

1. En calculant la somme suivante (par un télescopage) pour $n \geq 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, b_k + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}\,(b_{k+1} - b_k)\,,$$

   montrer que

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, b_k = (a_n b_n - a_0 b_0) - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}\,(b_{k+1} - b_k)$$

   Cette égalité est appelée formule de sommation par parties.

2. En déduire que pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$(x-1)\sum_{k=0}^{n-1} kx^k = nx^n - \frac{x^{n+1} - x}{x-1}$$

3. Montrer que si $|x| < 1$ alors la série $\sum kx^k$ converge. Calculer la somme de cette série.

Exercice 5. Montrer que la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + \pi^4}}$$

est convergente mais pas absolument convergente.

Exercice 6.

1. Déterminer si l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{2t\ln(t) + t}\mathrm{d}t$ est bien définie.

   On pourra faire le changement de variable $u = \ln(t)$.

2. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n\ln(n)+n}$.