

Fonctions à deux variables

Contrôle continu

Durée : 2h00.

Toute réponse doit être justifiée.

Le correcteur tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.

Les appareils électroniques et tout document sont interdits.

Exercice 1.

1. Énoncer le théorème de Schwarz.
2. Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont les dérivées partielles sont de classe $\mathcal{C}^2$ et qui est harmonique, c'est-à-dire $\Delta f := \partial_{xx}^2 f + \partial_{yy}^2 f = 0$. Montrer que $\partial_x f$, $\partial_y f$ et $(x, y) \mapsto x\partial_x f(x, y) + y\partial_y f(x, y)$ sont harmoniques.
On pourra introduire les dérivées partielles troisièmes de f en continuant le système de notation du cours : par exemple, $\partial_{xxx}^3 f := \partial_{xx}^2 \partial_x f$.
3. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer la matrice jacobienne de f .
- (b) Montrer que $\partial_{xy}^2 f(0, 0) = \partial_{yx}^2 f(0, 0)$.
- (c) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

Exercice 2.

1. Soient A une partie non-vide de $\mathbb{R}^2$ et $x \in \mathbb{R}^2$. Justifier que l'ensemble $\{\|x - a\| \mid a \in A\} \subset \mathbb{R}$ admet une borne inférieure.
On pose alors
$$d(x, A) := \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}.$$
2. Soit $\Gamma := \{(t, \frac{1}{t}) \mid t \neq 0\}$. Calculer $d(0, \Gamma)$ et $d(0, \Gamma \setminus \{\pm(1, 1)\})$.
Rappelons qu'un minorant m d'une partie X de $\mathbb{R}$ est la borne inférieure de X si, et seulement si, $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in X, y < m + \varepsilon$.
3. Soient $x \in \mathbb{R}^2$ et A une partie de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $x \in \overline{A}$ si, et seulement si, $d(x, A) = 0$.
4. Soient $x \in \mathbb{R}^2$ et A une partie de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.
5. Soit F une partie de $\mathbb{R}^2$. Montrer que F est fermée si, et seulement si, $(\forall x \in \mathbb{R}^2, d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F)$.
6. Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, |d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$.

Exercice 3. Le but de cet exercice est de résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x^2 \partial_{xx}^2 f(x, y) - y^2 \partial_{yy}^2 f(x, y) = 0 \tag{1}$$

pour une fonction $f:]0, +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Soit $\varphi:]0, +\infty[^2 \rightarrow]0, +\infty[^2$ la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \varphi(x, y) := \left(\frac{y}{x}, xy \right)$$

1. Montrer que φ est une bijection sur son image A , que l'on déterminera, et donner sa bijection réciproque.

On notera u et v les variables de φ^{-1}

2. Montrer que φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^2$. Calculer la matrice jacobienne de φ^{-1} .
3. Soit $f:]0, +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$

(a) Calculer (si cela a un sens) $\partial_{vu}(f \circ \varphi^{-1})$.

(b) En déduire que f est une solution de (1) si, et seulement si,

$$\forall (u, v) \in A, \partial_{vu}(f \circ \varphi^{-1})(u, v) = \frac{1}{2v} \partial_u(f \circ \varphi^{-1})(u, v).$$

(c) En déduire que f est une solution de (1) si, et seulement si, pour tout u , la fonction $\Phi_u := \partial_u f \circ \varphi^{-1}(u, \cdot)$ vérifie l'équation différentielle ordinaire $\Phi'_u = \frac{1}{2v} \Phi_u$.

4. En déduire l'ensemble des solutions de (1).

Exercice 4. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) := \begin{cases} (x^2 + y^2)^x & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer $f^{-1}(1)$.
2. Montrer que f est continue. *Indication :* $\lim_{u \rightarrow 0^+} u \ln(u) = 0$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
4. Étudier l'existence des dérivées partielles de f en $(0, 0)$.
5. Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) := f(x, 0).$$

(a) Construire le tableau de variation de g .

Indication : Faire attention à ce que toutes les expressions manipulées aient un sens

(b) En déduire que f n'a pas d'extremum local en $(0, 0)$.

6. (a) Déterminer les points critiques de f dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(b) Montrer que $\forall x \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}, f(x, y) \geq g(x)$.

(c) En déduire que f a un minimum local en $(\frac{1}{e}, 0)$.

(d) Redémontrer ce résultat grâce à des considérations sur la hessienne de f .

(e) En reprenant les deux questions b) et c), montrer que f a un maximum local en $(-\frac{1}{e}, 0)$.

(f) Montrer que les autres points critiques ne sont pas des extrema locaux.

Indication : On pourra introduire et étudier une fonction à une variable bien choisie de façon analogue à la question 5.

Exercice 5. Pour chacune des lettres grecques suivantes, donner son nom en français et préciser s'il s'agit d'une minuscule ou d'une majuscule :

1. Ξ

2. ω

3. ϑ

4. Υ