

Fonctions à deux variables

Contrôle continu

Durée : 2h00.

Toute réponse doit être justifiée.

Le correcteur tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.

Les appareils électroniques et tout document sont interdits.

Exercice 1.

1. Énoncer le théorème de Schwarz.
2. Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont les dérivées partielles sont de classe $\mathcal{C}^2$ et qui est harmonique, c'est-à-dire $\Delta f := \partial_{xx}^2 f + \partial_{yy}^2 f = 0$. Montrer que $\partial_x f$, $\partial_y f$ et $(x, y) \mapsto x\partial_x f(x, y) + y\partial_y f(x, y)$ sont harmoniques.
On pourra introduire les dérivées partielles troisièmes de f en continuant le système de notation du cours : par exemple, $\partial_{xxx}^3 f := \partial_{xx}^2 \partial_x f$.
3. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer la matrice jacobienne de f .
- (b) Montrer que $\partial_{xy}^2 f(0, 0) = \partial_{yx}^2 f(0, 0)$.
- (c) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

Solution : 1) Soient $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in U$. Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^2$ en a . Alors

$$\partial_{xy} f(a) = \partial_{yx} f(a).$$

- 2) Pour une fonction g de classe $\mathcal{C}^2$, on notera $\Delta g := \partial_{xx}^2 g + \partial_{yy}^2 g$. On a alors

$$\Delta(\partial_x f) = \partial_{xxx}^3 f + \partial_{yyx}^3 f \stackrel{f \in \mathcal{C}^2}{=} \partial_{xxx}^3 f + \partial_{yxy}^3 f \stackrel{\partial_y f \in \mathcal{C}^2}{=} \partial_{xxx}^3 f + \partial_{xyy}^3 f \stackrel{\partial_x \text{ linéaire}}{=} \partial_x \Delta f = 0.$$

et

$$\Delta(\partial_y f) = \partial_{xxy}^3 f + \partial_{yyy}^3 f \stackrel{f \in \mathcal{C}^2}{=} \partial_{xyx}^3 f + \partial_{yyy}^3 f \stackrel{\partial_x f \in \mathcal{C}^2}{=} \partial_{yxx}^3 f + \partial_{yyy}^3 f \stackrel{\partial_y \text{ linéaire}}{=} \partial_y \Delta f = 0.$$

Soit $\varphi: (x, y) \mapsto x\partial_x f(x, y) + y\partial_y f(x, y)$. Alors

$$\forall (x, y) \in U, \partial_x \varphi(x, y) = x\partial_{xx} f(x, y) + \partial_x f(x, y) + y\partial_{xy} f(x, y)$$

et

$$\forall (x, y) \in U, \partial_y \varphi(x, y) = x\partial_{yx} f(x, y) + \partial_y f(x, y) + y\partial_{yy} f(x, y)$$

Donc

$$\forall (x, y) \in U, \partial_{xx} \varphi(x, y) = \partial_{xx} f(x, y) + x\partial_{xxx} f(x, y) + \partial_{xx} f(x, y) + y\partial_{xxy} f(x, y)$$

et

$$\forall (x, y) \in U, \partial_{yy} \varphi(x, y) = x\partial_{yyx} f(x, y) + \partial_{yy} f(x, y) + \partial_{yy} f(x, y) + y\partial_{yyy} f(x, y)$$

Par conséquent,

$$\forall (x, y) \in U, \Delta \varphi(x, y) = 2\Delta f(x, y) + x\Delta(\partial_x f)(x, y) + y\Delta(\partial_y f)(x, y) = 0$$

3)a) La fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ comme fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \text{Jac}_{(x,y)} f = \left(\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

Comme, pour $h \neq 0$

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 \rightarrow 0$$

et

$$\frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0 \rightarrow 0$$

alors $\partial_x f(0, 0)$ et $\partial_y f(0, 0)$ existent et sont nulles.

Les fonctions $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont continues en $(0, 0)$. En effet, en passant en coordonnées polaires, on a, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

$$|\partial_x f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))| = \frac{2r^5 |\cos(\theta)| \sin^4(\theta)}{r^4} \leq 2r \rightarrow 0$$

et

$$|\partial_y f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))| = \frac{2r^5 \cos^4(\theta) |\sin(\theta)|}{r^4} \leq 2r \rightarrow 0$$

b) Comme, pour $h \neq 0$

$$\frac{\partial_y f(h, 0) - \partial_y f(0, 0)}{h} = 0 \rightarrow 0$$

et

$$\frac{\partial_x f(0, h) - \partial_x f(0, 0)}{h} = 0 \rightarrow 0$$

alors $\partial_{xy} f(0, 0) = 0 = \partial_{yx} f(0, 0)$.

c) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, f est $\mathcal{C}^2$ en (x, y) comme fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas et on a :

$$\partial_{yx} f(x, y) = \frac{8x^3 y^3}{(x^2 + y^2)^3}.$$

En composant avec $\gamma : t \mapsto (t, t)$, on obtient, pour $t \neq 0$:

$$\partial_{yx} f(\gamma(t)) = \frac{8t^6}{(2t^2)^3} = 1 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 \neq \partial_{yx} f(0, 0).$$

Exercice 2.

1. Soient A une partie non-vide de $\mathbb{R}^2$ et $x \in \mathbb{R}^2$. Justifier que l'ensemble $\{\|x - a\| \mid a \in A\} \subset \mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

On pose alors

$$d(x, A) := \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}.$$

2. Soit $\Gamma := \{(t, \frac{1}{t}) \mid t \neq 0\}$. Calculer $d(0, \Gamma)$ et $d(0, \Gamma \setminus \{\pm(1, 1)\})$.

Rappelons qu'un minorant m d'une partie X de $\mathbb{R}$ est la borne inférieure de X si, et seulement si, $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in X, y < m + \varepsilon$.

3. Soient $x \in \mathbb{R}^2$ et A une partie de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $x \in \overline{A}$ si, et seulement si, $d(x, A) = 0$.
4. Soient $x \in \mathbb{R}^2$ et A une partie de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.
5. Soit F une partie de $\mathbb{R}^2$. Montrer que F est fermée si, et seulement si, $(\forall x \in \mathbb{R}^2, d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F)$.
6. Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, |d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$.

Solution : 1) L'ensemble $\{\|x - a\| \mid a \in A\}$ est non-vide (car A est non-vide) et minoré (par 0, car une norme est positive) donc admet une borne inférieure.

2) On a l'égalité suivante :

$$\{\|x\| \mid x \in \Gamma\} = \left\{ \left\| \left(t, \frac{1}{t} \right) \right\| \mid t \neq 0 \right\} = \left\{ \max \left(|t|, \frac{1}{|t|} \right) \mid t \neq 0 \right\}$$

Comme $1 \in \left\{ \max\left(|t|, \frac{1}{|t|}\right) \mid t \neq 0 \right\}$, $|t| > 1$ ssi $\frac{1}{|t|} < 1$ et $|t| < 1$ ssi $\frac{1}{|t|} > 1$ alors

$$\{\|x\| \mid x \in \Gamma\} = \left\{ \max\left(|t|, \frac{1}{|t|}\right) \mid t \neq 0 \right\} = \{1\} \cup \{|t| \mid |t| > 1\} \cup \{|t|^{-1} \mid |t| < 1\} = [1, +\infty[.$$

On en déduit donc que

$$d(0, \Gamma) = \inf[1, +\infty[= 1$$

Par le même raisonnement, on obtient (la différence étant que $1 \notin \{\|x\| \mid x \in \Gamma \setminus \{\pm(1, 1)\}\}$) :

$$d(0, \Gamma \setminus \{\pm(1, 1)\}) = \inf]1, +\infty[= 1.$$

3) Soit $x \in \overline{A}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de l'adhérence, on peut fixer $y \in A$ tel que $\|y - x\| < \varepsilon$. Ainsi, $\inf\{\|x - a\| \mid a \in A\} < \varepsilon$. Comme cette égalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$ alors $\inf\{\|x - a\| \mid a \in A\} = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $d(x, A) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Par la caractérisation de la borne inférieure, il existe $a \in A$ tel que $\|a - x\| < \varepsilon$ i.e. $B(x, \varepsilon) \cap A$ est non-vide. On en déduit donc que $x \in \overline{A}$.

4) Montrons que $d(x, A) = d(x, \overline{A})$ par double inégalité.

Comme $A \subset \overline{A}$ alors pour tout $a \in A$, $\|x - a\| \geq \inf\{\|x - a\| \mid a \in \overline{A}\} = d(x, \overline{A})$. Comme le membre de gauche ne dépend pas de a , on en déduit donc que $d(x, A) \geq d(x, \overline{A})$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par la caractérisation de la borne inférieure, on peut choisir $\tilde{a} \in \overline{A}$ telle que

$$\|x - \tilde{a}\| < \varepsilon/2 + d(x, \overline{A}).$$

Par définition de l'adhérence, on peut alors choisir $a \in A$ tel que $\|a - \tilde{a}\| < \varepsilon/2$. On a alors

$$d(x, A) \leq \|x - a\| \stackrel{IT}{\leq} \|x - \tilde{a}\| + \|a - \tilde{a}\| < \varepsilon + d(x, \overline{A})$$

Comme c'est valable pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, on en déduit que $d(x, A) \leq d(x, \overline{A})$.

5) Supposons que F est fermé. Alors par la question 2, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{F} = F$.

Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}^2, d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$. Soit $x \in \overline{F}$. Alors par la question 3), $d(x, \overline{F}) = 0$. Comme $\overline{\overline{F}} = \overline{F}$ alors $d(x, \overline{F}) = 0$. Par la question 4, on en déduit que $d(x, F) = 0$. Par hypothèse, $x \in F$. On en déduit que $\overline{F} \subset F$. Comme on sait que $F \subset \overline{F}$, on en déduit que $F = \overline{F}$ et donc que F est fermée.

6) Soit $x, y \in \mathbb{R}^2$. Soit $a \in A$. On a :

$$d(x, A) \leq \|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|$$

et donc

$$d(x, A) - \|x - y\| \leq \|y - a\|.$$

Comme le membre de gauche ne dépend pas de a , on en déduit que

$$d(x, A) - \|x - y\| \leq d(y, A)$$

et donc

$$d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|$$

Par symétrie de rôle, on obtient

$$d(y, A) - d(x, A) \leq \|x - y\|,$$

d'où le résultat

Exercice 3. Le but de cet exercice est de résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x^2 \partial_{xx}^2 f(x, y) - y^2 \partial_{yy}^2 f(x, y) = 0 \tag{1}$$

pour une fonction $f:]0, +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Soit $\varphi:]0, +\infty[^2 \rightarrow]0, +\infty[^2$ la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \varphi(x, y) := \left(\frac{y}{x}, xy\right)$$

1. Montrer que φ est une bijection sur son image A , que l'on déterminera, et donner sa bijection réciproque.

On notera u et v les variables de φ^{-1}

2. Montrer que φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^2$. Calculer la matrice jacobienne de φ^{-1} .

3. Soit $f:]0, +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$

(a) Calculer (si cela a un sens) $\partial_{vu}(f \circ \varphi^{-1})$.

(b) En déduire que f est une solution de (1) si, et seulement si,

$$\forall (u, v) \in A, \partial_{vu}(f \circ \varphi^{-1})(u, v) = \frac{1}{2v} \partial_u(f \circ \varphi^{-1})(u, v).$$

(c) En déduire que f est une solution de (1) si, et seulement si, pour tout u , la fonction $\Phi_u := \partial_u f \circ \varphi^{-1}(u, \cdot)$ vérifie l'équation différentielle ordinaire $\Phi'_u = \frac{1}{2v} \Phi_u$.

4. En déduire l'ensemble des solutions de (1).

Solution : 1) On remarque que $\varphi([0, +\infty[^2) \subset]0, +\infty[^2$. On va montrer que la corestriction¹ $\varphi:]0, +\infty[^2 \rightarrow]0, +\infty[^2$ est une bijection en donnant la bijection réciproque : pour tout $x, y, u, v \in]0, +\infty[$,

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = u \\ xy = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ux \\ v = xy = ux^2 \end{cases} \xLeftrightarrow{x \geq 0} \begin{cases} y = ux = \sqrt{uv} \\ x = \sqrt{\frac{v}{u}}. \end{cases}$$

On en déduit que φ est bijective de réciproque $\varphi^{-1}: (u, v) \mapsto (\sqrt{\frac{v}{u}}, \sqrt{uv})$.

2) La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ car ses fonctions coordonnées sont des fonctions $\mathcal{C}^2$ comme fonctions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas. La fonction φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^2$ car ses fonctions coordonnées sont des fonctions $\mathcal{C}^2$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^2$ (de $\sqrt{\cdot}$ et de fonctions rationnelles).

On a, pour $(u, v) \in]0, +\infty[^2$:

$$\text{Jac}_{(u,v)}\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{v}}{2u\sqrt{u}} & \frac{1}{2\sqrt{uv}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{pmatrix}$$

3)a) Comme f et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^2$ alors $f \circ \varphi^{-1}$ est $\mathcal{C}^2$. Alors, pour $(u, v) \in]0, +\infty[^2$,

$$\partial_{vu}f \circ \varphi^{-1}(u, v) = -\frac{1}{4u^2} \partial_{xx}^2 f \circ \varphi^{-1}(u, v) + \frac{1}{4} \partial_{yy}^2 f \circ \varphi^{-1}(u, v) + \left(-\frac{1}{4u\sqrt{uv}} \partial_x f \circ \varphi^{-1}(u, v) + \frac{1}{4\sqrt{uv}} \partial_y f \circ \varphi^{-1}(u, v) \right)$$

b)c) On a, pour $(u, v) \in]0, +\infty[^2$,

$$\partial_u(f \circ \varphi^{-1})(u, v) = -\frac{\sqrt{v}}{2u\sqrt{u}} \partial_x f \circ \varphi^{-1}(u, v) + \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} \partial_y f \circ \varphi^{-1}(u, v) = 2v \left(-\frac{1}{4u\sqrt{uv}} \partial_x f \circ \varphi^{-1}(u, v) + \frac{1}{4\sqrt{uv}} \partial_y f \circ \varphi^{-1}(u, v) \right)$$

On en déduit que les assertions suivantes sont équivalentes

1. f est solution de (1) ;
2. $\forall (u, v) \in]0, +\infty[^2, \partial_{vu}f \circ \varphi^{-1}(u, v) = -\frac{1}{4u\sqrt{uv}} \partial_x f \circ \varphi^{-1}(u, v) + \frac{1}{4\sqrt{uv}} \partial_y f \circ \varphi^{-1}(u, v)$;
3. $\forall (u, v) \in]0, +\infty[^2, \partial_{vu}f \circ \varphi^{-1}(u, v) = \frac{1}{2v} \partial_u(f \circ \varphi^{-1})(u, v)$;
4. $\forall (u, v) \in]0, +\infty[^2, \Psi'_u(v) = \frac{1}{2v} \Psi_u(v)$;

le passage de 3. à 4. vient du fait que la dérivée de $\Psi_u = \partial_u f(u, \cdot):]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est $\partial_{vu}f(u, \cdot)$.

4) D'après le cours de première année, les solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2t}y$ sur $]0, +\infty[$ sont

$$t \mapsto C \exp\left(\frac{1}{2} \ln(t)\right) = C\sqrt{t}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Supposons que f est une solution de classe $\mathcal{C}^2$ de (1). Alors pour tout u , il existe un unique $c(u)$ tel que

$$\forall v \in]0, +\infty[, \Phi_u(v) = c(u)\sqrt{v}$$

Comme $c = (v \mapsto \Phi_u(1) = \partial_u f(u, 1))$ et que f est $\mathcal{C}^2$ alors c est de classe $\mathcal{C}^1$. On en déduit que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est solution de (1) ;

¹que l'on notera de la même façon pour des raisons de simplicité

2. $\forall (u, v) \in]0, +\infty[^2, \Psi'_u(v) = \frac{1}{2v} \Psi_u(v)$;
3. $\exists c \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R}), \forall (u, v) \in]0, +\infty[^2, \partial_u f \circ \varphi^{-1}(u, v) = c(u)\sqrt{v}$;
4. $\exists C \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[, \mathbb{R}), \exists D :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \forall (u, v) \in]0, +\infty[^2, f \circ \varphi^{-1}(u, v) = C(u)\sqrt{v} + D(v)$;

Le passage de 3. à 4. se fait en prenant $C' = c$.

On remarque dans la dernière égalité, la fonction D est $\mathcal{C}^2$ si, et seulement si, f est $\mathcal{C}^2$. On en déduit que les assertions suivantes sont équivalentes pour $f :]0, \infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

1. f est une solution de classe $\mathcal{C}^2$ de (1) ;
2. $\exists C \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[, \mathbb{R}), \exists D \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[, \mathbb{R}), \forall (u, v) \in]0, +\infty[^2, f \circ \varphi^{-1}(u, v) = C(u)\sqrt{v} + D(v)$;
3. $\exists C \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[, \mathbb{R}), \exists D \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[, \mathbb{R}), \forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, f(x, y) = C\left(\frac{y}{x}\right)\sqrt{xy} + D(xy)$;

et donc l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^2$ de (1) est :

$$\left\{ (x, y) \mapsto C\left(\frac{y}{x}\right)\sqrt{xy} + D(xy) \mid C \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[, \mathbb{R}), D \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[, \mathbb{R}) \right\}$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) := \begin{cases} (x^2 + y^2)^x & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer $f^{-1}(1)$.
2. Montrer que f est continue. *Indication* : $\lim_{u \rightarrow 0^+} u \ln(u) = 0$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
4. Étudier l'existence des dérivées partielles de f en $(0, 0)$.
5. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) := f(x, 0).$$

- (a) Construire le tableau de variation de g .
Indication : Faire attention à ce que toutes les expressions manipulées aient un sens
- (b) En déduire que f n'a pas d'extremum local en $(0, 0)$.
6. (a) Déterminer les points critiques de f dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
(b) Montrer que $\forall x \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}, f(x, y) \geq g(x)$.
(c) En déduire que f a un minimum local en $(\frac{1}{e}, 0)$.
(d) Redémontrer ce résultat grâce à des considérations sur la hessienne de f .
(e) En reprenant les deux questions b) et c), montrer que f a un maximum local en $(-\frac{1}{e}, 0)$.
(f) Montrer que les autres points critiques ne sont pas des extrema locaux.
Indication : On pourra introduire et étudier une fonction à une variable bien choisie de façon analogue à la question 5.

Solution : 1) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x, y) = 1 &\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ ou } ((x, y) \neq (0, 0) \text{ et } (x^2 + y^2)^x = 1) \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ ou } ((x, y) \neq (0, 0) \text{ et } e^{x \ln(x^2 + y^2)} = 1) \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ ou } ((x, y) \neq (0, 0) \text{ et } x \ln(x^2 + y^2) = 0) \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ ou } ((x, y) \neq (0, 0) \text{ et } (x = 0 \text{ ou } \ln(x^2 + y^2) = 0)) \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ ou } ((x, y) \neq (0, 0) \text{ et } (x = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 = 1)) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $f^{-1}(1) = \{0\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{S}^1$.

2)3) Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, la fonction f est la composée de fonctions $\mathcal{C}^2$ et est donc $\mathcal{C}^2$.
 Montrons que la fonction f est continue en $(0,0)$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on a :

$$|x \ln(x^2 + y^2)| = |x| |\ln(x^2 + y^2)| \leq \sqrt{x^2 + y^2} |\ln(x^2 + y^2)| = 2|\sqrt{x^2 + y^2} \ln(\sqrt{x^2 + y^2})| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

On en déduit que $x \ln(x^2 + y^2) \rightarrow 0$ et donc $f(x,y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 1 = f(0,0)$. Par conséquent, f est continue en $(0,0)$.

4) Soit $h \neq 0$. On a :

$$\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{(h^2)^h - 1}{h} = \frac{e^{h \ln(h^2)} - 1}{h} = \frac{2h \ln(|h|) + o(h \ln |h|)}{h} = 2 \ln(|h|) + o(\ln |h|) \rightarrow -\infty$$

et

$$\frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \frac{1 - 1}{h} = 0 \rightarrow 0.$$

On en déduit que f n'admet pas de dérivée partielle en $(0,0)$ sur la première coordonnée mais en admet une sur la seconde et $\partial_y f(0,0) = 0$.

5)a) La fonction g s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} x^{2x} = e^{2x \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ (-x)^{2x} = e^{2x \ln(-x)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Cette fonction est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Pour $x > 0$,

$$g'(x) = 2(\ln(x) + 1)e^{2x \ln(x)}$$

Comme $e^{2x \ln(x)}$ est toujours positive alors le signe de $g'(x)$ dépend uniquement de celui de $\ln(x) + 1$. On en conclut que $g'(x) \geq 0$ si, et seulement si, $x \geq \frac{1}{e}$

Pour $x < 0$,

$$g'(x) = 2(\ln(-x) + 1)e^{2x \ln(-x)}$$

Comme $e^{2x \ln(-x)}$ est toujours positive alors le signe de $g'(x)$ dépend uniquement de celui de $\ln(-x) - 1$. On en conclut que $g'(x) \geq 0$ si, et seulement si, $x \leq -\frac{1}{e}$.

On en déduit que g est croissante sur $]-\infty, -e^{-1}]$, est décroissante sur $[-e^{-1}, e^{-1}]$ puis est croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln(-x) = -\infty$ (par produit), $g(-e^{-1}) = e^{2/e}$, $g(e^{-1}) = e^{-2/e}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty$ (par produit)

b) On déduit de la question précédente que

$$\forall \delta \in]0, e^{-1}[, f(\delta, 0) = g(\delta) \leq g(0) = f(0, 0)$$

et

$$\forall \delta \in]0, e^{-1}[, f(-\delta, 0) = g(-\delta) \geq g(0) = f(0, 0)$$

Ainsi, pour tout $\delta > 0$, on peut trouver $x, y \in B(0, \delta)$ (car si $\delta \geq e^{-1}$, $\pm(e^{-1}/2, 0) \in B(0, \delta)$) tel que

$$f(x) \geq f(0, 0) \geq f(y).$$

Ainsi f n'a pas d'extremum local en $(0,0)$.

6)a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Alors

$$\nabla_{(x,y)} f = (x^2 + y^2)^x \left(x \frac{2x}{x^2 + y^2} + \ln(x^2 + y^2) \right) \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \nabla_{(x,y)} f = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x^2}{x^2 + y^2} + \ln(x^2 + y^2) = 0 \\ \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x = 0 \text{ et } \ln(y^2) = 0) \text{ ou } (y = 0 \text{ et } \frac{2x^2}{x^2} + \ln(x^2) = 0) \\ &\Leftrightarrow (x = 0 \text{ et } y = \pm 1) \text{ ou } (y = 0 \text{ et } x = \pm e^{-1}) \end{aligned}$$

Ainsi, les points critiques de f sont $(0, \pm 1)$ et $(\pm e^{-1}, 0)$.

6)b) Soient $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$. Comme $x^2 + y^2 \geq x^2$ alors par croissance de $\ln$, on a : $\ln(x^2 + y^2) \geq \ln(x^2)$ puis par positivité de x , on obtient $x \ln(x^2 + y^2) \geq x \ln(x^2)$. Par croissance de $\exp$, on en conclut que $f(x,y) \geq$

$e^{x \ln(x^2)} = f(x, 0) = g(x)$. Si $x = 0$ alors $f(x, y)$ vaut toujours 1 pour n'importe quel y et donc en particulier $f(x, y) \geq f(x, 0) = g(x)$.

c) Pour tout $x \geq 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x, y) \geq g(y) \geq g(e^{-1}) = f(e^{-1}, 0)$$

En particulier, pour $(x, y) \in B((e^{-1}, 0), e^{-1})$, $f(x, y) \geq f(e^{-1}, 0)$.

d) On a :

$$\text{Hess}_{(e^{-1}, 0)} f = \begin{pmatrix} 2e^{1-2/e} & 0 \\ 0 & 2e^{1-2/e} \end{pmatrix}$$

qui est définie positive, f admet donc un minimum local en $(e^{-1}, 0)$.

e) Soient $x < 0$ et $y \in \mathbb{R}$. Comme $x^2 + y^2 \geq x^2$ alors par croissance de $\ln$, on a : $\ln(x^2 + y^2) \geq \ln(x^2)$ puis par négativité de x , on obtient $x \ln(x^2 + y^2) \leq x \ln(x^2)$. Par croissance de $\exp$, on en conclut que $f(x, y) \leq e^{x \ln(x^2)} = f(x, 0) = g(x)$. Si $x = 0$ alors $f(x, y)$ vaut toujours 1 pour n'importe quel y et donc en particulier $f(x, y) \leq f(x, 0) = g(x)$.

Pour tout $x \leq 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x, y) \leq g(y) \leq g(e^{-1}) = f(e^{-1}, 0)$$

En particulier, pour $(x, y) \in B((-e^{-1}, 0), e^{-1})$, $f(x, y) \leq f(e^{-1}, 0)$.

f) Soit $x > 0$. Alors

$$f(x, \pm 1) = e^{x \ln(x^2 + 1)} > e^0 = 1 = f(0, \pm 1)$$

car $\ln(x^2 + 1) > \ln(1) = 0$ et $x > 0$. Soit $x < 0$. Alors

$$f(x, \pm 1) = e^{x \ln(x^2 + 1)} < e^0 = 1 = f(0, \pm 1)$$

car $\ln(x^2 + 1) > \ln(1) = 0$ et $x < 0$. On conclut de la même façon que dans la question 5)b).

Exercice 5. Pour chacune des lettres grecques suivantes, donner son nom en français et préciser s'il s'agit d'une minuscule ou d'une majuscule :

1. Ξ

2. ω

3. ϑ

4. Υ

Solution :

1. xi majuscule

2. omega minuscule

3. theta minuscule

4. upsilon majuscule