

Arithmétique des polynômes

Contrôle de seconde chance

Durée : 1h30.

Toute réponse doit être justifiée.

Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.

Les appareils électroniques et tout document sont interdits.

Exercice 1.

1. Montrer que les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
2. Donner (sans justification) les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2. Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

Exercice 3. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^{2026} + X^5 + 1$ par $(X+1)^2$.

Exercice 4. Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} P \equiv X - 2 \pmod{X^2 - 3X + 1} \\ P \equiv 2 - 7X \pmod{X^2 + X + 1} \end{cases}$$

Exercice 5. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{X^4 - X^2 + 1}{X^3 - X^2}.$$

Exercice 6. On note x_1, x_2, x_3 les trois racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P := 2X^3 - 8X^2 + 2X + \lambda$ où le coefficient λ est choisi de telle sorte qu'on ait : $x_1 + x_2 = 1$.

1. Écrire les relations coefficients-racines pour P .
2. Calculer x_3 .
3. Montrer que $x_1 x_2 = -2$.
4. En déduire les couples (x_1, x_2) vérifiant l'énoncé.