

Arithmétique

Contrôle de seconde chance

Durée : 1h30.

Toute réponse doit être justifiée.

Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.

Les appareils électroniques et tout document sont interdits.

Exercice 1. Montrer par récurrence forte que tout nombre entier supérieur à 2 s'écrit comme un produit de nombres premiers.

Dans l'hérédité, on pourra faire la disjonction de cas “ $n + 1$ premier” et “ $n + 1$ non premier”.

Exercice 2. Déterminer tous les entiers naturels dont la division euclidienne par 6 a un quotient égal au reste.

Exercice 3.

1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$(x^2 + 4x = y^2 + 19) \Leftrightarrow ((x - y + 2)(x + y + 2) = 23)$$

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{N}^2$ de l'équation : $x^2 + 4x = y^2 + 19$.

Exercice 4.

1. Déterminer le PGCD de 1218 et 504 et en déduire une relation de Bézout entre ces deux nombres.
2. Déterminer leur PPCM comme un produit de puissances de nombres premiers.

Exercice 5.

1. Calculer N^2 en base 2 pour $N := \overline{11}^2$, $N := \overline{111}^2$ et $N := \overline{1111}^2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer N^2 en base 2 pour $N := \underbrace{\overline{1 \dots 1}}_{n \text{ fois}}^2$.

Exercice 6. Résoudre le système de congruences $\begin{cases} 2x \equiv 9 \pmod{17} \\ x \equiv 3 \pmod{10} \end{cases}$ et donner la plus petite solution strictement positive.