

Arithmétique

Contrôle de seconde chance

Durée : 1h30.

Toute réponse doit être justifiée.

Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.

Les appareils électroniques et tout document sont interdits.

Exercice 1. Montrer par récurrence forte que tout nombre entier supérieur à 2 s'écrit comme un produit de nombres premiers.

Dans l'hérédité, on pourra faire la disjonction de cas " $n + 1$ premier" et " $n + 1$ non premier".

Solution : cf. cours

Exercice 2. Déterminer tous les entiers naturels dont la division euclidienne par 6 a un quotient égal au reste.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de n par 6 s'écrit $n = 6q + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < 6$. La division euclidienne de n par 6 a un quotient égal à son reste si, et seulement si, $q = r$, c'est-à-dire si, et seulement si, $n = 7r$. On en déduit que n vérifie l'énoncé si, et seulement si, $n \in \{7r \mid 0 \leq r < 6\} = \{0, 7, 14, 21, 28, 35\}$.

Exercice 3.

1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$(x^2 + 4x = y^2 + 19) \Leftrightarrow ((x - y + 2)(x + y + 2) = 23)$$

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{N}^2$ de l'équation : $x^2 + 4x = y^2 + 19$.

Solution : 1) Soient $x, y \in \mathbb{Z}$. On trouve :

$$((x - y + 2)(x + y + 2) - 23 = (x + 2)^2 - y^2 - 23 = x^2 + 4x - y^2 - 19.$$

On en déduit que

$$(x^2 + 4x = y^2 + 19) \Leftrightarrow ((x - y + 2)(x + y + 2) = 23)$$

2) Soient $x, y \in \mathbb{N}$. On déduit de la question précédente que (x, y) est solution de $x^2 + 4x = y^2 + 19$ si, et seulement si,

$$(x - y + 2)(x + y + 2) = 23 \tag{1}$$

Comme $x - y + 2$ et $x + y + 2$ sont des entiers, on en déduit qu'ils sont des diviseurs de 23 (i.e. dans l'ensemble $\{\pm 1, \pm 23\}$) et plus précisément, l'égalité (1) est équivalente à $(x - y + 2, x + y + 2) \in \{(1, 23), (23, 1), (-1, -23), (-23, -1)\}$. Comme $x, y \in \mathbb{N}$ alors $x + y + 2 \geq x - y + 2$ et $x + y + 2 \geq 0$ et donc l'équation (1) est équivalente à $(x - y + 2, x + y + 2) \in (1, 23)$. Ce système est à son tour équivalent à $(x, y) = (10, 11)$.

Exercice 4.

1. Déterminer le PGCD de 1218 et 504 et en déduire une relation de Bézout entre ces deux nombres.
2. Déterminer leur PPCM comme un produit de puissances de nombres premiers.

Solution : 1) PGCD(1218, 504) = 42 et $5 \times 1218 - 12 \times 504 = 42$.

2) PPCM(1218, 504) = PPCM(42×29 , 42×12) = $42 \times 29 \times 12 = 2 \times 3 \times 7 \times 29 \times 2^2 \times 3 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 29$.

Exercice 5.

1. Calculer N^2 en base 2 pour $N := \overline{11}^2$, $N := \overline{111}^2$ et $N := \overline{1111}^2$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer N^2 en base 2 pour $N := \underbrace{\overline{1 \dots 1}}_{n \text{ fois}}^2$.

Solution : 1) Si $N = \overline{11}^2$ alors $N^2 = \overline{1001}^2$, $N = \overline{111}^2$ alors $N^2 = \overline{110001}^2$ et $N = \overline{1111}^2$ alors $N^2 = \overline{11100001}^2$.

2) Si $n = 0$ alors $N = 0$ et donc $N^2 = 0$, si $N = 1$ alors $N^2 = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Alors

$$N = \underbrace{\overline{1 \dots 1}}_{n \text{ fois}}^2 = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1.$$

On en déduit donc

$$N^2 = (2^n - 1)^2 = 2^{2n} - 2^{n+1} + 1 = 2^{n+1}(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^{n+1} \sum_{k=0}^{n-2} 2^k + 1$$

On en déduit donc que

$$N^2 = \underbrace{\overline{1 \dots 1}}_{n-1 \text{ fois}} \underbrace{\overline{0 \dots 0}}_{n \text{ fois}} \overline{1}^2$$

Exercice 6. Résoudre le système de congruences $\begin{cases} 2x \equiv 9 \pmod{17} \\ x \equiv 3 \pmod{10} \end{cases}$ et donner la plus petite solution strictement positive.

Solution : Comme $2 \times 9 \equiv 1 \pmod{17}$ alors le système $\begin{cases} 2x \equiv 9 \pmod{17} \\ x \equiv 3 \pmod{10} \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} x \equiv 9 \times 9 \equiv 13 \pmod{17} \\ x \equiv 3 \pmod{10} \end{cases}$.

Comme 17 et 10 sont premiers entre eux alors par le théorème des restes chinois, le système a une unique solution modulo 170. On trouve une relation de Bézout $3 \times 17 - 5 \times 10 = 1$. On en déduit que $3 \times 3 \times 17 - 13 \times 5 \times 10 = -497$ est cette solution modulo 170.

Les solutions sont de la forme $-497 + 170k = 13 + 170(k - 3)$, $k \in \mathbb{Z}$. Si $k < 3$ alors $13 + 170(k - 3) \leq -157 < 0$ et si $k > 3$ alors $13 + 170(k - 3) > 13$, on en déduit que 13 est la plus petite solution strictement positive.